

具有不确定控制系数的随机低阶非线性系统 有限时间输出反馈控制

张佳鹏¹, 宋公飞^{1,2*}, 夏永康¹

(1. 南京信息工程大学 自动化学院, 江苏 南京 210044; 2. 江苏省大气环境与装备技术协同创新中心, 江苏 南京 210044)

摘要: 文章研究一类具有不确定控制系数的随机低阶非线性系统的有限时间输出反馈控制问题, 提出一种基于尺度变换与动态观测器增益的控制策略。本研究通过引入坐标变换, 将不确定控制系数的非线性影响转化为可调增益, 结合改进的齐次控制方法构建状态反馈控制器, 并设计含待定增益的降维观测器, 估计不可测状态。进一步提出增益迭代优化机制, 动态调整观测器参数以抵消随机扰动与不确定性, 最终基于复合 Lyapunov 函数严格证明闭环系统在概率意义下的全局有限时间稳定性。仿真实验表明, 所提方法在控制系数不确定、状态不可测及随机噪声干扰下仍能实现快速收敛, 突破了传统输出反馈控制对确定性模型和固定增益观测器的依赖。

关键词: 不确定控制系数; 低阶; 有限时间; 输出反馈镇定; 观测器增益

中图分类号: O231.3

文献标识码: A

文章编号: 1008-9659(2026)02-0040-10

在现代控制理论中, 非线性系统的控制问题是一个备受关注的研究领域, 特别是在系统具有随机扰动和控制系数不确定的情况下^[1-4]。这类系统广泛存在于实际工程中, 如机械系统、电力系统、生物医学系统等。然而, 由于非线性、随机性和不确定性的存在, 对这类系统进行精确控制仍充满挑战。为应对这些挑战, 有限时间控制方法逐渐成为研究热点。与传统的渐近稳定性不同, 有限时间控制旨在在有限时间内使系统状态达到目标值, 从而提高系统响应的速度和精度。因此, 研究随机非线性系统的有限时间控制具有深远意义^[5-9]。Yin 等人^[10]在 Lyapunov 函数框架下对随机非线性系统进行严格的有限时间稳定性分析。随着李雅普诺夫稳定性理论与齐次系统理论的不断深化与拓展, 有限时间控制领域的研究获得了新的理论支撑, 国内外学者围绕其核心问题展开了广泛而深入的研究。上述研究中所考虑的非线性系统的阶数为 $r = 1$ 或 $r \geq 1$ ^[11-14]。

早期的控制理论主要集中于线性系统, 随着对非线性特性的深入理解, 研究者们开始将焦点转向更具挑战性的非线性控制问题。近年来, 随机控制理论的快速发展使得研究者们逐步认识到在控制系数未知的情况下设计有效控制策略的必要性, 尤其是在复杂的非线性系统中。这一领域的研究不仅具有理论价值, 还有助于解决实际工程问题。例如, Shao 等人^[15]针对低阶引起的纯连续非光滑场景以及干扰和多个未知非线性函数带来的负面影响, 引入控制增益代替在线设计自适应律, 利用齐次支配方法, 保持闭环系统的全局渐近稳定。Shao 等人^[16]通过改进的有限时间准则和巧妙的参数重叠选择, 证明随机低阶不确定非线性系统的实际有限时间稳定性。Li 等人^[17]通过扩展添加幂积分器技术和特殊的连续观测器设计, 明确构造了一个动态输出反馈控制器, 保证系统全局有限时间稳定。Liu 等人^[18]通过推广添加幂次积分器技术, 构造可实现的降阶观测器, 并利用随机有限时间稳定性准则, 设计有限时间输出反馈控制器, 保证闭环系统概率有限时

[收稿日期] 2025-01-15

[修回日期] 2025-04-10

[基金项目] 国家自然科学基金项目(61973170; 62373195); 江苏高校“青蓝工程”资助项目(R2023Q03)。

[作者简介] 张佳鹏(2001-), 男, 硕士研究生, 主要从事随机系统有限时间方面研究, E-mail: 1666588571@qq.com。

* [通讯作者] 宋公飞(1987-), 男, 教授, 主要从事随机非线性系统方面研究, E-mail: gfsong@nuist.edu.cn。

间稳定。Jiang等人^[19]通过用有限时间随机输入对状态稳定性刻画未测随机逆动态,结合Lyapunov函数并加入幂次积分技术,利用随机有限时间稳定性理论,设计状态反馈控制器,保证随机低阶非线性系统依概率全局有限时间稳定。Cui等人^[20]通过有限时间随机输入,对状态稳定性刻画未测量随机逆动态,解决具有时变阶数和随机逆动态的随机低阶非线性系统的有限时间镇定问题。

目前,尽管已有多项研究探讨了随机控制的基本理论与应用,但在实际工程中面临复杂环境和不确定性时,针对其有限时间内的输出反馈控制方法仍显不足。Gao等人^[21]巧妙运用同质支配方法,提出一种系统的输出反馈控制设计程序,使闭环系统的状态在有限时间内趋于零。Zha等人^[22]通过添加一个幂积分器技术,首先为标称系统设计一个输出反馈控制器,无需扰动非线性,然后基于齐次支配方法和随机有限时间稳定性定理,证明了闭环系统的解将在有限时间内收敛到原点。Wang等人^[23]采用动态表面控制方案来处理问题(这是传统反步法固有的),开发了一种新的输出反馈控制器,以保证受控系统的所有信号都在有限时间范围内稳定。Zhang等人^[24]研究了基于观测器的随机非严格反馈非线性系统的自适应有限时间神经控制问题,与现有状态不可测的随机非线性系统的自适应控制研究不同,所提出的控制方案可以保证随机非线性系统的有限时间稳定性。Wang等人^[25]通过设计模糊状态观测器来测量未知状态,并引入补偿机制来弥补滤波器引起的误差,提出了一种模糊有限时间命令滤波输出反馈控制方法。

针对具有不确定控制系数的随机低阶非线性系统,在现有研究多局限于确定性模型或依赖状态全可测假设的背景下,文章聚焦实际工程中普遍存在的状态不可测、控制系数未知及随机扰动耦合难题,提出了一种融合尺度变换与动态观测器的有限时间输出反馈控制方法。通过引入坐标变换将不确定控制系数的影响转化为可优化的尺度参数,突破了传统方法对模型精确性的依赖。针对低阶特性与状态不可测性,设计含迭代增益调整机制的降维观测器,解决了固定增益观测器在扰动下误差累积的稳定性瓶颈。进一步结合复合Lyapunov函数与随机有限时间稳定性理论,证明了闭环系统的概率全局收敛性,为机械臂、电力系统等实际场景中传感器受限的低阶非线性控制提供了兼具理论严谨性与工程适用性的新框架。

1 系统描述

文章研究一类不确定控制系数的随机低阶非线性系统

$$\begin{aligned} dx_1 &= m_1(t)x_2^r dt + f_1(t, x, u)dt + g_1^T(t, x, u)d\omega \\ &\vdots \\ dx_{n-2} &= m_{n-2}(t)x_{n-1}^r dt + f_{n-2}(t, x, u)dt + g_{n-2}^T(t, x, u)d\omega \\ dx_{n-1} &= m_{n-1}(t)x_n^r dt \\ dx_n &= m_n(t)u^r dt \\ y &= x_1 \end{aligned} \quad (1)$$

其中, $x = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$ 和 $y \in \mathbb{R}$ 分别表示系统的状态变量, 控制输入和输出变量。状态变量 x 是不可量测的。系统阶数 $r \in \mathbb{R}_{odd}^{<1} \triangleq \left\{ \frac{\theta_1}{\theta_2} \mid \theta_1 \text{ 和 } \theta_2 \text{ 为正奇整数且满足 } \theta_1 < \theta_2 \right\}$, m_k 表示不确定控制系数, 其中, $k = 1, \dots, n$ 。 ω 为一个定义在全概率空间 $\{\Omega, \mathcal{F}, P\}$ 上的 ℓ -维标准维纳过程, 其中 Ω 是采样空间, \mathcal{F} 是一个 σ -域, P 是一个概率测度。漂移项 $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 和扩散项 $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^\ell$ 是连续的且满足 $f_i(0, 0, 0) = 0$, $g_i(0, 0, 0) = 0$, $i = 1, \dots, n-2$ 。

假设 1 对于系统中的漂移项和扩散项, 存在两个正常数 ρ 和 ϕ , 对 $i = 1, \dots, n-2$, 有以下不等式

$$|f_i(t, x, u)| \leq \rho \sum_{j=i+2}^n |x_j|^r \quad (2)$$

$$\|g_i(t, x, u)\| \leq \phi \sum_{j=i+2}^n |x_j|^{\tilde{r}} \quad (3)$$

其中, r 为系统的幂次, $\tilde{r} = \frac{1+r}{2}$ 。

假设2 存在正常数 \underline{m} 和 \overline{m} 使得

$$\underline{m} \leq m_i \leq \overline{m}, i = 1, \dots, n \quad (4)$$

考虑具有如下形式的随机非线性系统

$$dx = f(x)dt + g^T(x)d\omega \quad (5)$$

其中, $x \in \mathbb{R}^n$ 为状态向量; ω 定义如式(1); $f_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ 与 $g_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times r}$ 是连续的, 且 $\forall t \geq 0$ 时满足 $f(0) = 0$ 与 $g(0) = 0$. 对于一个 C^2 函数 $V(x) \in \mathbb{R}^n$, 作用于系统的微分算子 L 定义为

$$LV(x) = \frac{\partial V(x)}{\partial x} f(x) + \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ g^T(x) \frac{\partial^2 V(x)}{\partial x^2} g(x) \right\} \quad (6)$$

定义1^[7] 系统(5)的平凡解在概率上是有限时间稳定的, 如果存在一个解表示为 $x(t; \xi_0)$, 对于 $\forall \xi_0 \in \mathbb{R}^n$ 和以下性质成立:

(1) 概率上的有限时间吸引: 若随机系统对于初始值 $\forall \xi_0 \in \mathbb{R}^n$, 记作 $x(t; \xi_0)$, 都存在一个解(无论是强解还是弱解); 此外, 对每一个任意值 $x_* \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, 首次到达时间 $\tau_{x_*} = \inf \{t: x(t; x_*) = 0\} = \inf \{t: \|x(t; x_*)\| = 0\}$ (也被称为随机稳定时间)是几乎肯定有限的, 即 $P\{\tau_{\xi_0} < \infty\} = 1$;

(2) 依概率稳定: 对于每一对 $\varepsilon \in (0, 1)$ 且 $r > 0$, 存在一个 $\delta = \delta(\varepsilon, r) > 0$, 每当 $|\xi_0| < \delta$ 时, $P\{|x(t; \xi_0)| < r, \forall t \geq 0\} \geq 1 - \varepsilon$ 成立, 则称系统(5)的平凡解是依概率有限时间稳定的。

首先, 引入坐标变换

$$\eta_i = x_i p^{-s_i}, i = 1, \dots, n \quad (7)$$

其中, $p \geq 1$ 为常数。 s_1, \dots, s_n 被定义为 $s_n = 1, s_k = s_{k+1}r + 1, k = 1, \dots, n-1$. 然后将系统(1)变换为

$$\begin{cases} d\eta_i(t) = c_i(t) p^{-1} \eta_{i+1}^r(t) dt + \bar{f}_i(t, \eta, u) dt + \bar{g}_i(t, \eta, u) d\omega \\ d\eta_{n-1}(t) = c_{n-1}(t) p^{-1} \eta_n^r(t) dt \\ d\eta_n(t) = c_n(t) p^{-1} u^r(t) dt \\ y = \eta_1 \end{cases} \quad (8)$$

其中, $\bar{f}_i(\cdot) = p^{-s_i} f_i(\cdot), \bar{g}_i(\cdot) = p^{-s_i} g_i(\cdot), i = 1, \dots, n-2, \eta(t) = (\eta_1(t), \dots, \eta_n(t))^T \in \mathbb{R}^n$.

假设3 对于幂 s_i 和 $s_j, i = 1, \dots, n-2; j = i+2, \dots, n$, 有

$$\begin{cases} s_j r - s_i < -1 - r^{n-1} \\ s_j(1+r) - 2s_i < -1 - r^{n-1} \end{cases} \quad (9)$$

假设4 对于每个 $i = 1, \dots, n-2$, 下列不等式成立

$$\begin{aligned} |\bar{f}_i(\cdot)| &\leq p^{-1-r^{n-1}} \bar{\rho}_1 \sum_{j=2}^n |\xi_j|^r \\ \|\bar{g}_i(\cdot)\|^2 &\leq p^{-1-r^{n-1}} \bar{\phi}_1 \sum_{j=2}^n \xi_j^{1+r} \end{aligned} \quad (10)$$

其中, $\bar{\rho}_1, \bar{\phi}_1$ 是两个正常数。

假设5 存在两个正常数 $\bar{\rho}_2, \bar{\phi}_2$, 使得

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial V_n}{\partial \eta_i} \bar{f}_i &\leq p^{-1-r^{n-1}} \bar{\rho}_2 \sum_{j=1}^n \xi_j^{1+r} \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \left\| \bar{g}_i - \sum_{k=1}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \eta_k} \bar{g}_k \right\|^2 &\leq p^{-1-r^{n-1}} \bar{\phi}_2 \sum_{j=2}^n \xi_j^{1+r} \end{aligned} \quad (11)$$

其中, 假设3~5的存在旨在更好地支持控制器的构造, 并确保在控制器设计过程中, 负项系数中控制增益的幂次大于正项的幂次。通过适当选择控制增益 p , 可以有效抵消不确定非线性和 Hessian 项带来的负面影响, 从而增强控制器的设计效果。

2 主要结果

引理 1^[8] 假设存在正定、径向无界 Lyapunov 函数 $V(x) \in C^2$ 满足非负、径向无界,如果系统(5)是自治的且 $LV(x) \leq 0$,那么对于任意初始值,系统(5)有一个解。

引理 2^[7] 对于系统(5),若存在一个 C^2 Lyapunov 函数 $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^+$ 时正定的固有函数,且存在两个 κ_∞ 函数 β_1, β_2 使得

$$\beta_1(|x|) \leq V(x) \leq \beta_2(|x|), LV(x) \leq -\alpha(V(x))^\gamma$$

对于所有 $x \in \mathbb{R}^n, t \geq 0$ 且实数 $\alpha > 0, 0 < \gamma < 1$,则系统(5)的平凡解是有限时间吸引且概率稳定的。

引理 3^[1,3] 对于 $a, b \in \mathbb{R}, r \geq 1$ 有

$$\begin{aligned} |a+b|^r &\leq 2^{r-1}|a|^r + |b|^r, |a-b|^r \leq 2^{r-1}|a-b|^{\frac{1}{r}} \\ (|a|+|b|)^{\frac{1}{r}} &\leq |a|^{\frac{1}{r}} + |b|^{\frac{1}{r}} \leq 2^{\frac{r-1}{r}}(|a|+|b|)^{\frac{1}{r}}, \left|a^{\frac{1}{r}} - b^{\frac{1}{r}}\right| \leq 2^{\frac{r-1}{r}}|a-b|^{\frac{1}{r}} \end{aligned}$$

对于任意 $r > 0$ 和 $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$, 有 $(|a_1| + \dots + |a_n|)^r \leq \max\{n^{r-1}, 1\}(|a_1|^r + \dots + |a_n|^r)$ 。

引理 4^[1,3] 设 c, d 是正实数。对于 $a, b \in \mathbb{R}$ 和任意正实数 $\mu(a, b)$, 有

$$|a|^c |b|^d \leq \frac{c}{c+d} \mu(a, b) |a|^{c+d} + \frac{d}{c+d} \mu^{\frac{c}{d}}(a, b) |b|^{c+d}$$

定理 1 在满足假设 1、假设 2 和假设 5 时,对于随机非线性系统(1),构造相应的观测器和输出反馈控制器,则系统(1)对任何初始数据都有解,且系统(1)的原点在概率上是有限时间稳定的。

接下来将通过三个步骤证明系统(1)的原点在概率上是有限时间稳定的。

2.1 有限时间状态反馈镇定控制器设计

首先,假设状态变量能量测,考虑系统(8)为标称系统的控制设计,其被描述为

$$\begin{cases} d\eta_i(t) = m_i(t) p^{-1} \eta_{i+1}^r(t) dt, i = 1, \dots, n-1 \\ d\eta_n(t) = m_n(t) p^{-1} u^r(t) dt \\ y = \eta_1 \end{cases} \quad (12)$$

然后,引入坐标变换

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \eta_1, & \alpha_2 &= -h_1 \xi_1 \\ \xi_2 &= \eta_2 - \alpha_2, & \alpha_3 &= -h_2 \xi_2 \\ \xi_3 &= \eta_3 - \alpha_3, & \alpha_4 &= -h_3 \xi_3 \\ &\vdots & &\vdots \\ \xi_n &= \eta_n - \alpha_n, & \alpha_{n+1} &= -h_n \xi_n \end{aligned} \quad (13)$$

其中, $1, \dots, n$ 为正常数, $\alpha_2, \dots, \alpha_{n+1}$ 为稍后确定的虚拟控制律。

接下来利用递归的思想给出控制输入 u 的具体设计。

第 1 步: $V_1 = \frac{1}{2} \xi_1^2$, 根据 $\underline{m} \leq m_i \leq \overline{m}$ 可以得到

$$LV_1 = p^{-1} m_1 \xi_1 \eta_2' \leq -np^{-1} \xi_1^{1+r} + p^{-1} m_1 \xi_1 (\eta_2' - \alpha_2') + p^{-1} m_1 \xi_1 \left(\alpha_2' + \frac{n}{\underline{m}} \xi_1' \right) \quad (14)$$

选择

$$\alpha_2(\eta_1) = -h_1 \xi_1 \quad (15)$$

其中, $h_1 \geq \left(\frac{n}{\underline{m}} \right)^{\frac{1}{r}}$ 是个正常数,代入得

$$LV_1 \leq -np^{-1} \xi_1^{1+r} + p^{-1} m_1 \xi_1 (\eta_2' - \alpha_2') \quad (16)$$

第 k 步 ($2 \leq k \leq n-1$): 虚拟控制器 $\alpha_2, \dots, \alpha_{k-1}$ 被表示为

$$\alpha_l(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_{l-1}) = -h_{l-1} \xi_{l-1}, l = 2, \dots, k-1 \quad (17)$$

可以保证

$$LV_{k-1} \leq -(n-k+2)p^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} \xi_j^{1+r} + p^{-1} m_{k-1} \xi_{k-1} (\eta_k^r - \alpha_k^r) \quad (18)$$

显然,当 $k=2$ 时,式(18)变为式(16).下面,开始证明 α_k 存在,并且式(18)在第 k 步也成立.为此,选取 $V_k = V_{k-1} + \frac{1}{2} \xi_k^2$,从式(13)到式(18)可以看出

$$\begin{aligned} LV_k &\leq -(n-k+2)p^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} \xi_j^{1+r} + p^{-1} m_{k-1} \xi_{k-1} (\eta_k^r - \alpha_k^r) + p^{-1} m_k \xi_k \eta_{k+1}^r \\ &\quad + \left(h_{k-1} p^{-1} m_{k-1} |\eta_k|^r + \cdots + h_{k-1} h_{k-2} \cdots h_1 p^{-1} m_1 |\eta_2|^r \right) |\xi_k| \end{aligned} \quad (19)$$

根据引理3、引理4和 $0 \leq m_{k-1} \leq \bar{m}$,可以得到

$$\begin{aligned} &p^{-1} m_{k-1} \xi_{k-1} (\eta_k^r - \alpha_k^r) + \left(h_{k-1} p^{-1} m_{k-1} |\eta_k|^r + \cdots + h_{k-1} h_{k-2} \cdots h_1 p^{-1} m_1 |\eta_2|^r \right) |\xi_k| \\ &\leq p^{-1} \bar{m} |\xi_{k-1}|^{2^{1-r}} |\xi_k|^r + h_{k-1} p^{-1} \bar{m} \left(|\xi_k|^r + h_{k-1} |\xi_{k-1}|^r \right) |\xi_k| + \cdots + h_{k-1} \cdots h_1 p^{-1} \bar{m} \left(|\xi_2|^r + h_1 |\xi_1|^r \right) |\xi_k| \\ &\leq p^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} \xi_j^{1+r} + p^{-1} \lambda_k \xi_k^{1+r} \end{aligned} \quad (20)$$

其中, λ_k 是一个常数.因此,在第 k 个虚拟控制器可以表示为

$$\alpha_{k+1}(\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k) = -h_k \xi_k \quad (21)$$

其中, $h_k \geq \left((n-k+1+\lambda_k)/\bar{m} \right)^{\frac{1}{r}}$ 为正常数.

将式(20)和式(21)代入式(19)中,可以得到

$$LV_k \leq -(n-k+1)p^{-1} \sum_{j=1}^{k-1} \xi_j^{1+r} + p^{-1} m_k \xi_k (\eta_{k+1}^r - \alpha_{k+1}^r) \quad (22)$$

第 n 步:根据归纳法,式(22)在 n 步仍然成立.因此,在这一步选取

$$V_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \xi_i^2 \text{ 和 } u = \alpha_{n+1} = -h_n \xi_n = -\sum_{j=1}^n \left(\prod_{k=j}^n h_k \right) \eta_j \quad (23)$$

可以得到

$$LV_n = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial V_n}{\partial \eta_j} p^{-1} m_j \eta_{j+1}^r + \frac{\partial V_n}{\partial \eta_n} p^{-1} m_n u^r \leq -p^{-1} \sum_{j=1}^n \xi_j^{1+r} \quad (24)$$

其次,对原系统进行构造实际控制器.选取

$$V = V_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \xi_i^2 \quad (25)$$

然后,计算式(15)沿着系统式(8)的微分可以得到

$$LV = \sum_{j=1}^{n-2} \frac{\partial V}{\partial \eta_j} (p^{-1} m_j \eta_{j+1}^r + \bar{f}_j) + \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{2} \left\| \bar{g}_j - \sum_{k=1}^{j-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \eta_k} g_k \right\|^2 + \frac{\partial V}{\partial \eta_{n-1}} p^{-1} m_{n-1} \eta_n^r + \frac{\partial V}{\partial \eta_n} p^{-1} m_n \mu^r \quad (26)$$

估计式(26)中等式右边的每一项.根据第一部分,如果选择实际控制器

$$u = -\sum_{j=1}^n \left(\prod_{k=j}^n h_k \right) \eta_j = -\sum_{j=1}^n \left(\prod_{c_i=j}^n h_k \right) p^{-\theta_j} x_j \quad (27)$$

由式(24)可以看出

$$\sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial V}{\partial \eta_j} p^{-1} m_j \eta_{j+1}^r + \frac{\partial V}{\partial \eta_n} p^{-1} m_n \mu^r \leq -p^{-1} \sum_{j=1}^n \xi_j^{1+r} \quad (28)$$

那么由假设5可以看出

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n-2} \frac{\partial V}{\partial \eta_j} \bar{f}_i &\leq p^{-1-r^{c-1}} \bar{\rho}_2 \sum_{j=1}^n \xi_j^{1+r} \\ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-2} \left\| \bar{g}_i - \sum_{k=i}^{i-1} \frac{\partial \alpha_{i-1}}{\partial \eta_k} \bar{g}_k \right\|^2 &\leq p^{-1-r^{c-1}} \bar{\Phi}_2 \sum_{j=2}^n \xi_j^{1+r} \end{aligned} \quad (29)$$

将式(27)~式(29)代入式(26)可得

$$\begin{aligned} LV &\leq -p^{-1} \sum_{j=1}^n \xi_j^{1+r} + p^{-1-r^{r-1}} \bar{\rho}_2 \sum_{j=1}^n \xi_j^{1+r} + p^{-1-r^{r-1}} \bar{\phi}_2 \sum_{j=2}^n \xi_j^{1+r} \\ &\leq p^{-1-r^{r-1}} (p^{r^{r-1}} - \bar{\phi}_2 - \bar{\rho}_2) \sum_{j=1}^n \xi_j^{1+r} \end{aligned} \quad (30)$$

选取 $p^{r^{r-1}} - \bar{\phi}_2 - \bar{\rho}_2 > 1$ 可得

$$LV \leq -p^{-1} \left(p^{-r^{r-1}} \sum_{j=1}^n \xi_j^{1+r} \right) \quad (31)$$

2.2 观测器设计

由于状态变量 (x_2, \dots, x_n) 不可量测, 即 (η_2, \dots, η_n) 不可量测。对系统(8)设计 $n-1$ 维的观测器

$$\begin{aligned} \dot{\hat{z}}_i &= p^{-1} m_i (\hat{\eta}_{i+1}^r - L_{i-1} \hat{\eta}_i^r), i = 2, \dots, n-1 \\ \dot{\hat{z}}_n &= p^{-1} m_n (u^r - L_{n-1} \hat{\eta}_{n-1}^r) \end{aligned} \quad (32)$$

其中, $L_i > 1$ 是待设计的参数, 称为观测器增益。

误差变量 $e_i = z_i - \hat{z}_i, i = 2, \dots, n$. 其中

$$\begin{aligned} z_i &= m_i \eta_i - L_{i-1} \eta_{i-1}, m_i \hat{\eta}_i = \hat{z}_i + L_{i-1} \hat{\eta}_{i-1} \\ de_i &= p^{-1} [m_i (\eta_{i+1}^r - \hat{\eta}_{i+1}^r) - L_{i-1} (\eta_i^r - \hat{\eta}_i^r)] dt \\ de_n &= -p^{-1} L_{n-1} (\eta_n^r - \hat{\eta}_n^r) dt \end{aligned} \quad (33)$$

构造 Lyapunov 函数

$$W_k = \frac{e_2^2}{2} + \dots + \frac{e_n^2}{2} \quad (34)$$

对其作用无穷小算子可得

$$\begin{aligned} LW_n &= \sum_{i=2}^{n-1} \left[p^{-1} e_i (m_i (\eta_{i+1}^r - \hat{\eta}_{i+1}^r) - L_{i-1} (\eta_i^r - \hat{\eta}_i^r)) \right] + e_n [-p^{-1} L_{n-1} (\eta_n^r - \hat{\eta}_n^r)] \\ &= p^{-1} \left[-\sum_{i=2}^n e_i m_i L_{i-1} (\eta_i^r - \hat{\eta}_i^r) + \sum_{i=2}^{n-1} e_i m_i (\eta_{i+1}^r - \hat{\eta}_{i+1}^r) \right] \end{aligned} \quad (35)$$

接下来对其进行放大, 由上述误差变量 e_i 的定义以及对其进行简单的拆分可得

$$\begin{aligned} -\sum_{i=2}^n e_i m_i L_{i-1} (\eta_i^r - \hat{\eta}_i^r) &= -\sum_{i=2}^n e_i m_i L_{i-1} \left(\eta_i^r - (\eta_i - e_i - L_{i-1} (\eta_{i-1} - \hat{\eta}_{i-1}))^r \right) \\ &= -\sum_{i=2}^n e_i m_i L_{i-1} \left[\eta_i^r - (\eta_i - e_i)^r \right] - \sum_{i=3}^n e_i m_i L_{i-1} \left[(\eta_i - e_i)^r - (\eta_i - e_i - L_{i-1} (\eta_{i-1} - \hat{\eta}_{i-1}))^r \right] \end{aligned} \quad (36)$$

根据 $e_i = m_i (\eta_i - \hat{\eta}_i) - L_{i-1} (\eta_{i-1} - \hat{\eta}_{i-1})$, 并由引理2可得

$$e_i m_i L_{i-1} \left[(\eta_i - e_i)^r - (\eta_i - e_i - L_{i-1} (\eta_{i-1} - \hat{\eta}_{i-1}))^r \right] \leq 2^{1-r} m_i L_{i-1} |e_i| |L_{i-1} (\eta_{i-1} - \hat{\eta}_{i-1})|^r \quad (37)$$

当 $e_i \neq 0$ 时, 令 $t = \frac{\eta_i}{e_i}, v = L_{i-1}^{\frac{1}{1+r}}$, 得

$$\begin{aligned} -e_i m_i L_{i-1} \left[\eta_i^r - (\eta_i - e_i)^r \right] &\leq L_{i-1}^{\frac{r-1}{r+1}} e_i^{-1} \eta_i^{r+1} - L(L_{i-1}) e_i^{r+1} \\ &\leq L_{i-1}^{\frac{r-1}{r+1}} (\lambda_{i,1} e_i^{r+1} + \rho_{i,i-1,1} \eta_{i-1}^{r+1} + \rho_{i,i,1} \eta_i^{r+1}) - L(L_{i-1}) e_i^{r+1} \end{aligned} \quad (38)$$

当 $e_i = 0$ 时, 上式显然成立, 将式(37)和式(38)代入式(36)可得

$$-\sum_{i=2}^n m_i e_i L_{i-1} (\eta_i^r - \hat{\eta}_i^r) \leq \sum_{i=2}^n m_i \left[L_{i-1}^{\frac{r-1}{r+1}} (\lambda_{i,1} e_i^{r+1} + \gamma_{i,1} (\eta_{i-1}^{r+1} + \eta_i^{r+1}) - L(L_{i-1}) e_i^{r+1}) \right] + \sum_{i=3}^n 2^{1-r} m_i L_{i-1} |e_i| |L_{i-1} (\eta_{i-1} - \hat{\eta}_{i-1})|^r \quad (39)$$

其中, $L(L_{i-1}) := (2^r - 1) L_{i-1}^{\frac{2r}{1+r}} \lambda_{i,1} > 0, \rho_{i,i-1,1} > 0, \rho_{i,i,1} > 0$ 是设计常数。

通过简单的不等式放大和引理3、引理4得

$$\sum_{i=2}^{n-1} e_i m_i (\eta_{i+1}^r - \hat{\eta}_{i+1}^r) \leq \sum_{i=2}^{n-1} |e_i| m_i 2^{1-r} |\eta_{i+1} - \hat{\eta}_{i+1}|^r \quad (40)$$

代入得

$$\begin{aligned} LW_n \leq p^{-1} & \left[\sum_{i=2}^n m_i \left(L_{i-1}^{\frac{r-1}{r+1}} (\lambda_{i,1} e_i^{r+1} + \gamma_{i,1} (\eta_{i-1}^{r+1} + \eta_i^{r+1})) - L(L_{i-1}) e_i^{r+1} \right) \right. \\ & \left. + \sum_{i=3}^n 2^{1-r} |e_i| m_i |L_{i-1} (\eta_{i-1} - \hat{\eta}_{i-1})|^r + \sum_{i=2}^{n-1} 2^{1-r} |e_i| m_i |\eta_{i+1} - \hat{\eta}_{i+1}|^r \right] \end{aligned} \quad (41)$$

对式(41)进行处理,由 e_i 的定义并通过递推易得

$$\eta_{i+1} - \hat{\eta}_{i+1} = e_{i+1} + L_i (\eta_i - \hat{\eta}_i) = \cdots = e_{i+1} + L_i e_i + \cdots + L_i \cdots L_2 (\eta_2 - \hat{\eta}_2) \quad (42)$$

对不等式(42)进行放大

$$\sum_{i=3}^n 2^{1-r} |e_i| m_i |L_{i-1} (\eta_{i-1} - \hat{\eta}_{i-1})|^r + \sum_{i=2}^{n-1} 2^{1-r} |e_i| m_i |\eta_{i+1} - \hat{\eta}_{i+1}|^r \leq \bar{h}_2(L_{n-1}, \cdots, L_2) e_2^{r+1} + \cdots + \bar{h}_{n-1}(L_{n-1}) e_{n-1}^{r+1} + \lambda_{n,3} e_n^{r+1} \quad (43)$$

其中, $\bar{h}_2(\cdot), \cdots, \bar{h}_{n-1}(\cdot)$ 是关于变量的多项式函数,将式(41)和式(43)代入最终得到

$$\begin{aligned} LW_n \leq p^{-1} & \left\{ \left[-L(L_{n-1}) + L_{n-1}^{\frac{r-1}{r+1}} \lambda_{n,1} + \lambda_{n,3} \right] e_n^{r+1} + \left[-L(L_{n-2}) + L_{n-2}^{\frac{r-1}{r+1}} \lambda_{n-1,1} + \bar{h}_{n-1}(L_{n-1}) \right] e_{n-1}^{r+1} \right. \\ & + \cdots + \left[-L(L_1) + L_1^{\frac{r-1}{r+1}} \lambda_{2,1} + \bar{h}_2(L_{n-1}, \cdots, L_2) \right] e_2^{r+1} + L_1^{\frac{r-1}{r+1}} \rho_{2,1,1} \eta_1^{r+1} + \left(L_1^{\frac{r-1}{r+1}} \rho_{2,2,1} + L_2^{\frac{r-1}{r+1}} \rho_{3,2,1} \right) \eta_2^{r+1} \\ & \left. + \cdots + \left(L_{n-2}^{\frac{r-1}{r+1}} \rho_{n-1,n-1,1} + L_{n-1}^{\frac{r-1}{r+1}} \rho_{n,n-1} \right) \eta_{n-1}^{r+1} + L_{n-1}^{\frac{r-1}{r+1}} \rho_{n,n} \eta_n^{r+1} \right\} \end{aligned} \quad (44)$$

2.3 观测器增益设计

因为 η_2, \cdots, η_n 不可量测,通过上述观测器设计,根据确定性等价原理,用 $\hat{\eta}_i, i = 2, \cdots, n$,对控制器进行估计可以得到

$$u = -(h_1 \eta_1 + h_2 \hat{\eta}_2 + \cdots h_n \hat{\eta}_n), \hat{\eta}_1 = \eta_1 \quad (45)$$

选取李雅普诺夫函数 $U_n(\xi_1, \cdots, \xi_n, e_2, \cdots, e_n) = V_n(\xi_1, \cdots, \xi_n) + W_n(e_2, \cdots, e_n)$. 综合式(31)和式(44)可得

$$\begin{aligned} LU_n \leq p^{-1} & \left\{ -p^{-r} \sum_{j=1}^n \xi_j^{r+1} + \left[-L(L_{n-1}) + L_{n-1}^{\frac{r-1}{r+1}} \lambda_{n,1} + \lambda_{n,3} \right] e_n^{r+1} + \left[-L(L_{n-2}) + L_{n-2}^{\frac{r-1}{r+1}} \lambda_{n-1,1} + \bar{h}_{n-1}(L_{n-1}) \right] e_{n-1}^{r+1} \right. \\ & + \cdots + \left[-L(L_1) + L_1^{\frac{r-1}{r+1}} \lambda_{2,1} + \bar{h}_2(L_{n-1}, \cdots, L_2) \right] e_2^{r+1} + L_1^{\frac{r-1}{r+1}} \rho_{2,1,1} \eta_1^{r+1} + \left(L_1^{\frac{r-1}{r+1}} \rho_{2,2,1} + L_2^{\frac{r-1}{r+1}} \rho_{3,2,1} \right) \eta_2^{r+1} \\ & \left. + \cdots + \left(L_{n-2}^{\frac{r-1}{r+1}} \rho_{n-1,n-1,1} + L_{n-1}^{\frac{r-1}{r+1}} \rho_{n,n-1} \right) \eta_{n-1}^{r+1} + L_{n-1}^{\frac{r-1}{r+1}} \rho_{n,n} \eta_n^{r+1} \right\} \end{aligned} \quad (46)$$

记 $S(L_i) = L(L_i) - \lambda_{i+1,1} L_i^{\frac{r-1}{r+1}} = (2^r - 1) L_i^{\frac{2r}{r+1}} - \lambda_{i+1,1} L_i^{\frac{r-1}{r+1}}, (L_i > 1)$, 其中, $r \in (0, 1), \lambda_{i+1,1} > 0$ 是参数,显然对于任意的 $L_i > 1$,有 $S'(L_i) > 0$,即 $S(L_i)$ 关于 L_i 单调递增。对于给定的 r ,通过选择合适的 $\lambda_{i,1} > 0$ 使 $S(1) = 2^r - 1 - \lambda_{i,1} > 0$. 此时对任意的 $L_i > 1$ 有 $S(L_i) > 0$.

首先选择足够大的增益 L_{n-1} 满足 $S(L_{n-1}) \geq \max \left\{ \frac{1}{2}, \lambda_{n,3}, \lambda_{n,4} \right\}, \lambda_{n,2} L_{n-1}^{\frac{1-r}{1+r}} \leq \frac{1}{8}$. 接下来,选择足够大的 L_{n-2} 满足 $S(L_{n-2}) \geq \max \left\{ \frac{1}{2}, \bar{h}_{n-1} \right\}, \lambda_{n-1,2} L_{n-2}^{\frac{1-r}{1+r}} \leq \frac{1}{8}$. 同理,根据已经固定的 L_{i+1}, \cdots, L_{n-1} 选择 L_i 使其满足 $S(L_i) \geq \max \left\{ \frac{1}{2}, \bar{h}_{i+1} \right\}, \lambda_{i+1,i+1} L_i \leq \frac{1}{8}$. 最后,选择合适的 p^{-1} 使其满足 $p^{-1} \geq 1$.

通过上述增益的选择,显然可以得到

$$LU_n \leq - \left(\sum_{i=1}^n \gamma_i \xi_i^{r+1} + \sum_{i=2}^n \delta_i e_i^{r+1} \right) \quad (47)$$

其中, $\gamma_i > 0, i = 1, \cdots, n, \delta_i > 0, i = 2, \cdots, n$ 是常数。由 $U_n \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \xi_i^2 + \sum_{i=2}^n \frac{1}{2} e_i^2$,通过反复应用引理3可得

$$LU_n \leq -\gamma U^{\frac{1+r}{2}}, 0 < \frac{1+r}{2} < 1 \quad (48)$$

其中, $\gamma > 0$ 是常数。因为 $0 < \frac{1+r}{2} < 1$, 由引理 2 可知闭环系统 (1) 是依概率全局有限时间稳定。

3 仿真算例

不失一般性, 考虑如下随机非线性系统

$$\begin{cases} dx_1 = m(t)x_1^{\frac{3}{5}}dt + \frac{3}{10}\sin(x_3)dt + \frac{1}{8}x_3^{\frac{4}{5}}d\omega \\ dx_2 = x_3^{\frac{3}{5}}dt \\ dx_3 = u^{\frac{3}{5}}dt \end{cases} \quad (49)$$

其中, $r = \frac{3}{5}$. 因此, 易验证假设 1 是满足的, 其中 $\rho = \frac{3}{10}$ 且 $c = \frac{1}{8}$. 在控制器设计中选取 $m(t) = 3 - \sin(t)$, 验证假设 2 也是满足的, 其中 $\underline{m} = 2, \bar{m} = 4$.

构造其二阶观测器 $\dot{\hat{z}}_2 = p^{-1}m(t)\left(\hat{\eta}_3^{\frac{3}{5}} - L_1\hat{\eta}_2^{\frac{3}{5}}\right)$, $\dot{\hat{z}}_3 = p^{-1}m(t)\left(v^{\frac{3}{5}} - L_2\hat{\eta}_2^{\frac{3}{5}}\right)$. 选择实际的控制器为 $u = -(h_1\eta_1 + h_2\hat{\eta}_2 + h_3\hat{\eta}_3) = -48.6\eta_1 - 21.08\hat{\eta}_2 - 6.32\hat{\eta}_3$.

在仿真中选取初始条件为 $[x_1(0), x_2(0), x_3(0)]^T = [-0.5, -3, 3]^T$. 闭环系统 (49) 的响应曲线 (图 1~图 3) 验证了所提出设计方案的有效性。

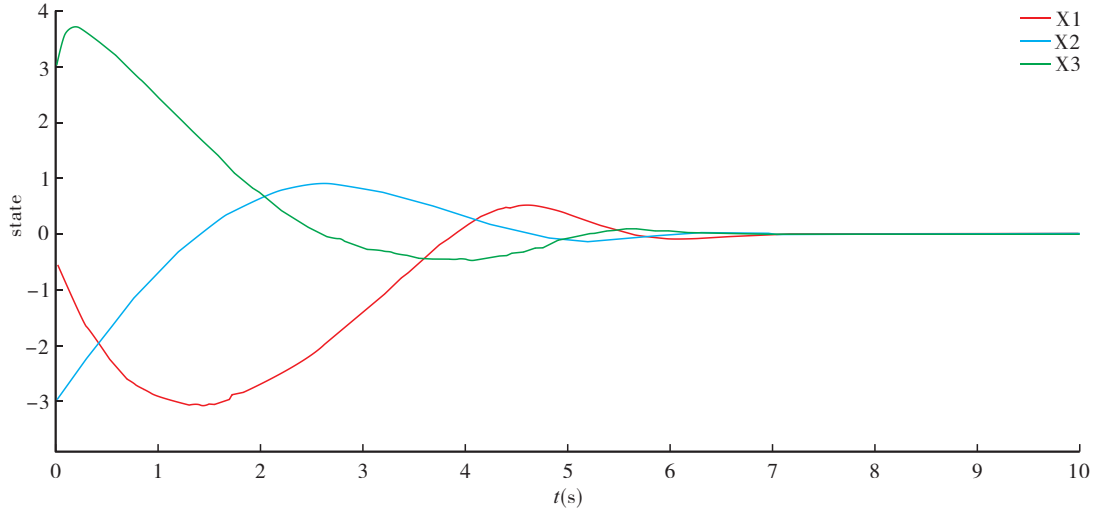


图1 系统状态响应曲线

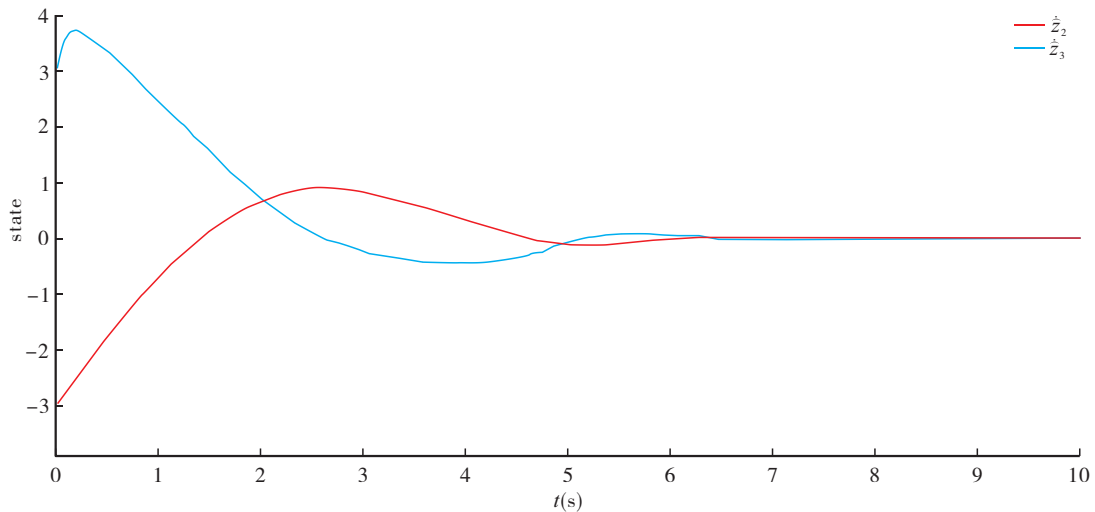


图2 观测器状态响应曲线

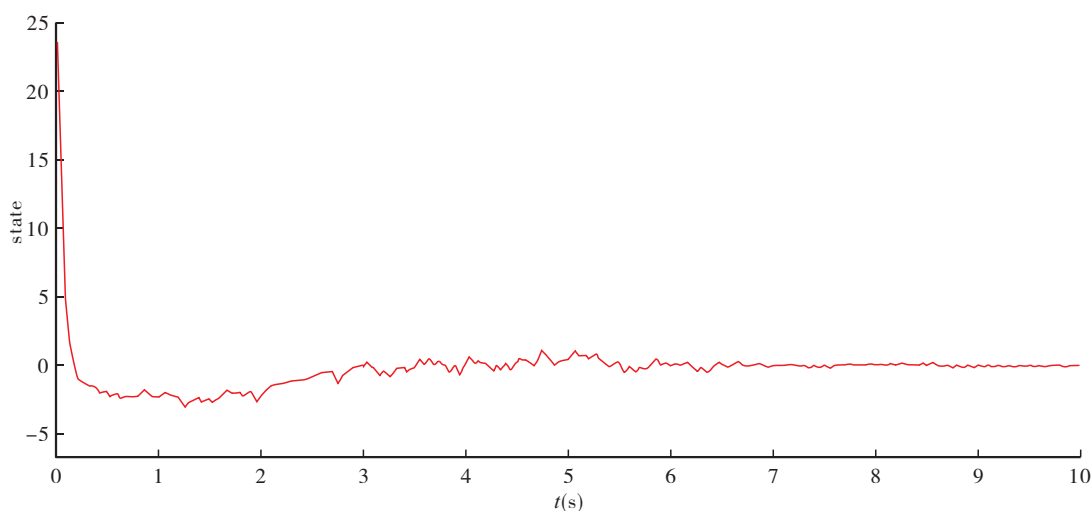


图3 控制器响应曲线

4 总结

文章针对具有不确定控制系数的随机低阶非线性系统,提出一种基于尺度变换与动态观测器设计的有限时间输出反馈控制策略。引入尺度参数对原系统进行坐标变换,将不确定控制系数的非线性影响转化为可优化的增益参数,并结合改进的齐次控制方法设计状态反馈控制器。进一步构造含待定增益的降维观测器,利用迭代算法动态调整观测器增益,有效解决了状态不可测与扰动累积的难题。理论分析中,利用复合Lyapunov函数严格证明了闭环系统在概率意义下的全局有限时间稳定性,仿真实验验证了所提方法在参数变动与随机噪声下的鲁棒性。文章的创新性体现在将尺度变换与动态观测器增益迭代机制相结合,突破传统方法对控制系数确定性假设的依赖,为低阶随机系统的工程应用,如机械臂控制、电力调节等提供新思路。未来研究可进一步探索非齐次扰动或时变控制系数的扩展场景,并尝试将算法框架推广至高阶或分数阶非线性系统,同时需在嵌入式平台中验证实时性与计算效率的工程可行性。

参考文献:

- [1] MAO X R. Stochastic Differential Equations and their Applications[M]. Chichester, Horwood Publishing, 2007.
- [2] 郑承民,田宏根,马昌秀.非线性系统高次奇点附近轨线分析[J].新疆师范大学学报(自然科学版),2005,24(04):4-10.
- [3] KHALIL H. Nonlinear Systems[M]. New Jersey: Prentice-Hall, 2002.
- [4] 王广兰.一类非线性微分系统的稳定性分析[J].新疆师范大学学报(自然科学版),2003,22(01):15-16.
- [5] BHAT S P, BERNSTEIN D S. Finite-time Stability of Continuous Autonomous Systems[J]. SIAM Journal on Control and Optimization, 2000, 38(03): 751-766.
- [6] CHEN W, JIAO L C. Finite-time Stability Theorem of Stochastic Nonlinear Systems[J]. Automatica, 2010, 46(12): 2105-2108.
- [7] KHOO S, YIN J L, MAN Z H, et al. Finite-time Stabilization of Stochastic Nonlinear Systems in Strict-feedback Form[J]. Automatica, 2013, 49(05): 1403-1410.
- [8] YIN J L, KHOO S. Continuous Finite-time State Feedback Stabilizers for Some Nonlinear Stochastic Systems[J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2015, 25(11): 1581-1600.
- [9] 邵钰.含有低阶幂次的随机非线性系统的分析与控制[D].南京:南京理工大学,2022.
- [10] YIN J L, KHOO S, MAN Z H, et al. Finite-time Stability and Instability of Stochastic Nonlinear Systems[J]. Automatica, 2011, 47(12): 2671-2677.
- [11] SUN Z Y, SHAO Y, CHEN C C. Fast Finite-time Stability and its Application in Adaptive Control of Bigh-order Nonlinear System[J]. Automatica, 2019, 106: 339-348.
- [12] ZHAO C R, XIE X J. Global Stabilization of Stochastic High-order Feedforward Nonlinear Systems with Time-varying Delay[J]. Automatica, 2014, 50(01): 203-210.
- [13] WANG H, ZHU Q. Finite-time Stabilization of High-order Stochastic Nonlinear Systems in Strict-feedback Form[J]. Automatica, 2015, 54: 284-291.

- [14] CUI R H, XIE X. Adaptive State-feedback Stabilization of State-constrained Stochastic High-order Nonlinear Systems [J]. Science China Information Sciences, 2021, 64: 1–11.
- [15] SHAO Y, PARK J H, XU S Y. Global Stabilization of Stochastic Feedforward Low-order Nonlinear Systems with Time Delays and Unknown Control Directions [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2022, 32(03): 1687–1702.
- [16] SHAO Y, XU S Y, CHEN X, et al. Fast Finite-time Control for a Class of Stochastic Low-order Nonlinear System with Uncertainties [J]. Journal of the Franklin Institute, 2024, 361(07): 106788.
- [17] LI J, QIAN C J. Global Finite-time Stabilization by Dynamic Output Feedback for a Class of Continuous Nonlinear Systems [J]. IEEE Transactions on Automatic Control, 2006, 51(05): 879–884.
- [18] LIU L, XU S Y, ZHANG Y F. Finite-time Output Feedback Control for a Class of Stochastic Low-order Nonlinear Systems [J]. International Journal of Control, 2017, 90(07): 1457–1465.
- [19] JIANG M M, XIE X J. Finite-time Stabilization of Stochastic Low-order Nonlinear Systems with FT-SISS Inverse Dynamics [J]. International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2018, 28(06): 1960–1972.
- [20] CUI R H, XIE X J. Finite-time Stabilization of Stochastic Low-order Nonlinear Systems with Time-varying Orders and FT-SISS Inverse Dynamics [J]. Automatica, 2021, 125: 109418.
- [21] GAO F Z, WU Y Q, ZHANG Z C. Finite-time Stabilization of Uncertain Nonholonomic Systems in Feedforward-like Form by Output Feedback [J]. ISA Transactions, 2015, 59(09): 125–132.
- [22] ZHA W T, ZHAI J Y, FEI S M, et al. Finite-time Stabilization for a Class of Stochastic Nonlinear Systems via Output Feedback [J]. ISA Transactions, 2014, 53(03): 709–716.
- [23] WANG L B, WANG H Q, LIU P X. Fuzzy Adaptive Finite-time Output Feedback Control of Stochastic Nonlinear Systems [J]. ISA Transactions, 2022, 125: 110–118.
- [24] ZHANG Y, WANG F. Observer-based Finite-time Control of Stochastic Non-strict-feedback Nonlinear Systems [J]. International Journal of Control, Automation and Systems, 2021, 19(02): 655–665.
- [25] WANG L B, WANG H Q, LIU P X, et al. Fuzzy Finite-time Command Filtering Output Feedback Control of Nonlinear Systems [J]. IEEE Transactions on Fuzzy Systems, 2020, 30(01): 97–107.

The Finite-time Output Feedback Control for Stochastic Low-order Nonlinear Systems with Uncertain Control Coefficients

ZHANG Jia-peng¹, SONG Gong-fei^{1,2*}, XIA Yong-kang¹

(1.School of Automation, Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing, Jiangsu, 210044, China; 2.Jiangsu Collaborative Innovation Center of Atmospheric Environment and Equipment Technology, Nanjing, Jiangsu, 210044, China)

Abstract: This paper addresses the finite-time output feedback control problem for a class of stochastic low-order nonlinear systems with uncertain control coefficients and proposes a control strategy based on scaling transformation and dynamic observer gains. By introducing coordinate transformations, the nonlinear effects of uncertain control coefficients are converted into adjustable gains, enabling the construction of a state feedback controller via an improved homogeneous control method. A reduced-order observer with undetermined gains is designed to estimate unmeasurable states, while an iterative gain optimization mechanism is further proposed to dynamically adjust observer parameters for counteracting stochastic disturbances and uncertainties. The global finite-time stability of the closed-loop system in a probabilistic sense is rigorously proven using a composite Lyapunov function. Simulation results demonstrate that the proposed method achieves rapid convergence under uncertain control coefficients, unmeasurable states, and stochastic noise disturbances, thereby overcoming the dependency of traditional output feedback control on deterministic models and fixed-gain observers. This work provides a robust theoretical framework for practical applications such as mechanical control and power regulation.

Keywords: Uncertain control coefficient; Low-order; Finite-time; Output feedback stabilization; Observer gain