

连通图的补图谱半径与支撑 k 树邱欢¹, 杨小波², 王国平^{3*}

(1. 西安市雁塔区第三中学 数学组, 陕西 西安 710000; 2. 昭通市实验小学 数学组, 云南 昭通 657000;

3. 新疆师范大学 数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 令 G 是简单连通图。设 G 有支撑树 T , 如果对于任意一点 $v \in V(T)$ 都有 $d_T(v) \leq k$, 则称 G 存在支撑 k 树。令 $A(G)$ 为 G 的邻接矩阵, 则 G^c 的邻接矩阵为 $A(G^c) = J_n - I_n - A(G)$ 。令 $\rho(G^c)$ 为矩阵 $A(G^c)$ 的最大特征值, 也称作 G^c 的谱半径。令 $G^* \cong K_1 \vee (K_{n-k-1} \cup kK_1)$, 并且 $n \geq k+2$ 和 $k \geq 5$ 。在文章中, 假设 G 是 n 阶连通图并且在 $n \geq k+2$ 和 $k \geq 5$ 限制下, 可得 $\rho(G^c) < \rho((G^*)^c)$, 则 G 存在支撑 k 树。

关键词: 支撑 k 树; 谱半径; 连通图**中图分类号:** O157.5**文献标识码:** A**文章编号:** 1008-9659(2026)04-0099-05

令 $G = (V(G), E(G))$ 是简单图, 其中 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的点集和边集。假设 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, 对于任意的点 $v_i \in V(G)$, 用 $N_G(v_i)$ 表示与点 v_i 相邻的点的集合, 点 v_i 的度 $d_G(v_i)$ 是指与点 v_i 相邻的点的数目, 即 $d_G(v_i) = |N_G(v_i)|$ 。用 $\Delta(G)$ 表示 G 的最大度。记 G 的补图 $G^c = (V(G), E(G^c))$, 其中 $E(G^c) = \{v_i v_j \notin E(G) : v_i, v_j \in V(G)\}$ 。设 $A(G) = (a_{ij})_{n \times n}$ 是 G 的邻接矩阵, 其中如果有 $v_i v_j \in E(G)$, 则 $a_{ij} = 1$, 否则, $a_{ij} = 0$ 。令 J_n 和 I_n 分别表示 n 阶全1矩阵和 n 阶单位矩阵, 则 G^c 的邻接矩阵为 $A(G^c) = J_n - I_n - A(G)$ 。由于 $A(G^c)$ 是实对称矩阵, 故 $A(G^c)$ 的所有特征值能被排序为 $\rho(G^c) \geq \lambda_2(G^c) \geq \dots \geq \lambda_n(G^c)$, 其中 $\rho(G^c)$ 是 $A(G^c)$ 的最大特征值, 也被称作 G^c 的谱半径。

设 G 为简单连通图。令 S 是 $V(G)$ 的一个点集, 则用 $G[S]$ 与 $G - S$ 分别表示由点集 S 和点集 $V(G) \setminus S$ 诱导出的导出子图, 即有 $E(G[S]) \subseteq E(G)$ 和 $E(G - S) \subseteq E(G)$ 。若 G 的支撑子图为树 T , 且对于任意一点 $v \in V(T)$ 都有 $d_T(v) \leq k$, 则称 T 为 G 的支撑 k 树。很明显, G 若有支撑树 T 满足 $\Delta(T) \leq k$, 则 G 存在支撑 k 树。迄今为止, 利用图的谱理论研究图的支撑树问题引起了广泛关注。Brouwer等人^[1]描述了通过邻接特征值和拉普拉斯特征值来判断一个图是否存在完美匹配的充分条件。Ding等人^[2]、Gargano等人^[3]、Neumann等人^[4]研究了在连通图中具有给定参数的支撑树的存在性。Kyaw^[5]提出了一个度和邻域条件, 以使连通图存在一个支撑 k 树。Cioaba等人^[6]提出了一个独立数条件, 以保证在连通图中存在一个支撑 k 树。还有一些相关的结论可以参考文献[7-10]。最近, Gu等人^[11]通过使用拉普拉斯特征值发现了连通图中支撑 k 树的一个充分条件。Fan等人^[12]分别通过使用邻接谱半径和无符号拉普拉斯谱半径获得了连通图中存在支撑 k 树的两个充分条件。

假设 K_m 是具有 m 个点的完全图, 若用一个点去连接 $K_{n-k-1} \cup kK_1$, 则得到的图记为 $G^* \cong K_1 \vee (K_{n-k-1} \cup kK_1)$ 。在 G 是 n 阶连通图并且 $n \geq k+2$ 和 $k \geq 5$ 的限制下, 若 G 不存在支撑 k 树, 文章证明了 $\rho(G^c) \geq \rho((G^*)^c)$ 。由此逆否命题得出结论, 在 G 是 n 阶连通图并且 $n \geq k+2$ 和 $k \geq 5$ 的限制下, 如果

[收稿日期] 2025-05-07

[修回日期] 2025-07-30

[作者简介] 邱欢(2001-), 女, 硕士研究生, 主要从事图谱理论方面研究, E-mail: 2667663002@qq.com.

* [通讯作者] 王国平(1965-), 男, 教授, 主要从事图论、组合数学等方面研究, E-mail: xj.wgp@163.com.

$\rho(G^c) < \rho((G^*)^c)$, 则 G 存在支撑 k 树。

1 相关引理

令 $X = (x_1, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n$, 其中 x_i 表示在点 v_i 处的取值, 则经过计算得出

$$X^T A(G) X = \sum_{v, v \in E(G)} x_i x_j$$

当 $X \neq 0$ 是 $\lambda(G)$ 对应的特征向量, 则对于任意点 $v \in V(G)$ 有

$$\lambda(G) X(v) = \sum_{u \in N_G(v)} X(u)$$

假设 G 不是连通图, 则用 $\omega(G)$ 表示 G 的连通分支数。

引理 1^[13] 令 $k \geq 3$ 并且 k 为整数。假设 G 为简单连通图并且对于任意一点集 $S \subseteq V(G)$ 满足

$$\omega(G - S) \leq (k - 2)|S| + 2$$

则 G 存在支撑 k 树。

引理 2 (Rayleigh 不等式) 令 G 是简单图。假设 $\rho(G)$ 和 $\lambda_n(G)$ 分别是 G 的谱半径和最小特征值, 并且 $X = (x_1, \dots, x_n)^T$ 是单位向量, 则

$$\lambda_n(G) \leq X^T A(G) X \leq \rho(G)$$

其中, $\lambda_n(G) = X^T A(G) X$ 当且仅当 X 是最小特征值 $\lambda_n(G)$ 对应的特征向量; $X^T A(G) X = \rho(G)$ 当且仅当 X 是谱半径 $\rho(G)$ 对应的特征向量。

2 主要结论

定理 1 令 $\tilde{G} \cong K_s \vee (K_{n-(k-1)s-2} \cup ((k-2)s+2)K_1)$ 并且 $G^* \cong K_1 \vee (K_{n-k-1} \cup kK_1)$, 其中 $s \in \mathbb{N}^+$ 并且 $n \geq (k-1)s+3$ 。如果 $k \geq 5$ 并且 $n \geq k+2$, 则 $\rho((G^*)^c) \leq \rho((\tilde{G})^c)$ 当且仅当 $\tilde{G} \cong G^*$ 时取等。

证明 为了书写方便, 将特征值 $\lambda((\tilde{G})^c)$ 简记为 $\hat{\lambda}$ 。令 X_1 表示特征值 $\hat{\lambda}$ 对应的特征向量。根据 $\tilde{G}$ 的对称性, 记 $\tilde{G}$ 中的点集 $V(((k-2)s+2)K_1)$ 中的任意一点取值为 x_1 ; 点集 $V(K_{n-(k-1)s-2})$ 中的任意一点取值为 x_2 ; 点集 $V(K_s)$ 中的任意一点取值为 x_3 。根据特征方程, 得

$$\begin{cases} \hat{\lambda}x_1 = ((k-2)s+1)x_1 + (n-(k-1)s-2)x_2 \\ \hat{\lambda}x_2 = ((k-2)s+2)x_1 \\ \hat{\lambda}x_3 = 0 \end{cases}$$

根据上述方程组可得到矩阵等式 $(\hat{\lambda}I_3 - A_1)X_1 = 0$, 其中

$$A_1 = \begin{pmatrix} (k-2)s+1 & n-(k-1)s-2 & 0 \\ (k-2)s+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令 $g(\hat{\lambda}, n, k, s) = |\hat{\lambda}I_3 - A_1|$, 可得

$$\begin{aligned} g(\hat{\lambda}, n, k, s) &= \hat{\lambda}^3 - (sk-2s+1)\hat{\lambda}^2 + (sk-2s+2)(sk-n-s+2)\hat{\lambda} \\ &= \hat{\lambda}(\hat{\lambda}^2 - (sk-2s+1)\hat{\lambda} + (sk-2s+2)(sk-n-s+2)) \end{aligned}$$

为书写方便, 将特征值 $\lambda((G^*)^c)$ 简记为 $\bar{\lambda}$ 。令 X_2 表示特征值 $\bar{\lambda}$ 对应的特征向量。根据 G^* 的对称性, 记 G^* 中的点集 $V(kK_1)$ 中的任意一点取值为 x_1 ; 点集 $V(K_{n-k-1})$ 中的任意一点取值为 x_2 ; 点集 $V(K_1)$ 中的任意一点取值为 x_3 。根据特征方程, 得

$$\begin{cases} \bar{\lambda}x_1 = (k-1)x_1 + (n-k-1)x_2 \\ \bar{\lambda}x_2 = kx_1 \\ \bar{\lambda}x_3 = 0 \end{cases}$$

根据上述方程组可得到矩阵等式 $(\bar{\lambda}I_3 - A_2)X_2 = 0$,其中

$$A_2 = \begin{pmatrix} k-1 & n-k-1 & 0 \\ k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

令 $f(\bar{\lambda}, n, k, s) = |\bar{\lambda}I_3 - A_2|$,可得

$$f(\bar{\lambda}, n, k, s) = \bar{\lambda}^3 - (k-1)\bar{\lambda}^2 + k(-n+k+1)\bar{\lambda}$$

令 $\hat{\lambda} = \bar{\lambda} = \lambda$,则 $g(\hat{\lambda}, n, k, s) = g(\lambda, n, k, s)$,且 $f(\bar{\lambda}, n, k, s) = f(\lambda, n, k, s)$.

令

$$\begin{aligned} F(\lambda, n, k, s) &= g(\lambda, n, k, s) - f(\lambda, n, k, s) \\ &= -(ks - 2s + 1)\lambda^2 + (ks - 2s + 2)(ks - n - s + 2)\lambda + (k-1)\lambda^2 - k(-n+k+1)\lambda \\ &= (s-1)\lambda((s+1)k^2 + (-n-3s-\lambda+1)k + 2n + 2s + 2\lambda - 4) \end{aligned}$$

因为 $(\tilde{G})^c$ 中存在子图 $K_{(k-2)s+2}$ 并且 $\rho(K_{(k-2)s+2}) = (k-2)s + 1$,所以 $\rho((\tilde{G})^c) \geq \rho(K_{(k-2)s+2})$. 因此

$$\rho((\tilde{G})^c) \geq (k-2)s + 1$$

令

$$\begin{aligned} h(\lambda, n, k, s) &= (s+1)k^2 + (-n-3s-\lambda+1)k + 2n + 2s + 2\lambda - 4 \\ &= (-k+2)\lambda + (s+1)k^2 + (-n-3s+1)k + 2n + 2s - 4 \\ &\leq (-k+2)((k-2)s+1) + (s+1)k^2 + (-n-3s+1)k + 2n + 2s - 4 \\ &= -(k-2)n + k^2 + s(k-2) - 2 \\ &\leq -(k-2)((k-1)s+3) + k^2 + s(k-2) - 2 \\ &= (1-s)(k^2 - 4k + 4) + k \\ &\leq -k^2 + 5k - 4 < 0 \end{aligned}$$

综上所述,当 $k \geq 5, n \geq (k-1)s + 3, s \geq 2$ 并且 $\lambda \geq (k-2)s + 1$ 时

$$F(\lambda, n, k, s) = g(\lambda, n, k, s) - f(\lambda, n, k, s) = (s-1)\lambda h(\lambda, n, k, s) < 0$$

因此,当 $k \geq 5, n \geq (k-1)s + 3$ 并且 $s \geq 2$ 时

$$\rho((G^*)^c) < \rho((\tilde{G})^c)$$

又由于 $s = 1$ 时, $\tilde{G} \cong G^*$.

因此,根据上述论证过程可知,当 $k \geq 5$ 并且 $n \geq (k-1)s + 3 \geq k + 2$ 时, $\rho((G^*)^c) \leq \rho((\tilde{G})^c)$ 当且仅当 $\tilde{G} \cong G^*$ 时取等。

定理2 假设 G 是 n 阶连通图并且 $n \geq k + 2$ 和 $k \geq 5$. 如果 $\rho(G^c) < \rho((G^*)^c)$,则 G 存在支撑 k 树。

证明 假设 G 为不存在支撑 k 树的 n 阶连通图。根据引理1,则存在非空点集 $S \subseteq V(G)$ 使得 $\omega(G-S) \geq (k-2)|S| + 3$. 对 S 进行加边使之形成完全图,并且对 G 删去 S 后所形成的连通分支分别加边,使之分别形成完全图。然后对 S 中的所有点与连通分支之间加所有可能的边使得在 S 中任意选取一点都与 $V(G) \setminus V(S)$ 中的任意一点相邻,由此得到结果图 G_1 . 此时,显然 G_1 不存在支撑 k 树。令 $|S| = s$ 并且 $\omega(G-S) = t$,则

$$G_1 \cong K_s \vee (K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \cdots \cup K_{n_t})$$

其中, $n_1 \geq n_2 \geq \cdots \geq n_t$ 并且 $n_1 + n_2 + \cdots + n_t = n - s$. 很明显,有

$$\sum_{uv \in E(G)} X(u)X(v) \leq \sum_{uv \in E(G_1)} X(u)X(v)$$

在 $K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \cdots \cup K_{n_t}$ 中找一最大分量点 w , 即

$$X(w) = \max \{X(v) : v \in V(K_{n_1} \cup K_{n_2} \cup \cdots \cup K_{n_t})\}$$

不失一般性, 不妨假设 $w \in K_{n_1}$, 对于 $K_{n_2}, K_{n_3}, \cdots, K_{n_t}$, 分别任意选择一点 $v_2, v_3, \cdots, v_t$, 其中 $v_2 \in K_{n_2}, v_3 \in K_{n_3}, \cdots, v_t \in K_{n_t}$. 断掉 v_i 与 $K_{n_1} \setminus w_i$ 之间所有的连边, 并且对 K_{n_1} 与 $K_{n_i} \setminus w_i (i = 2, 3, \cdots, t)$ 加上所有可能的边使之成为完全图, 由此得到结果图

$$G_2 \cong K_s \vee (K_{n-s-(t-1)} \cup (t-1)K_1)$$

又因为

$$\sum_{u \in V(K_{n_1}) \setminus w_i (2 \leq i \leq t)} X(v_i)X(w) - \sum_{u \in V(K_{n_1}) \setminus w_i (2 \leq i \leq t)} X(v_i)X(u) + \sum_{u \in V(K_{n_1}) \setminus w_i (2 \leq i \leq t), w_j \in V(K_{n_j}) \setminus w_j (1 \leq j \leq n_1-1)} X(u)X(w_j) > 0$$

所以

$$\sum_{uv \in E(G_1)} X(u)X(v) \leq \sum_{uv \in E(G_2)} X(u)X(v)$$

由 $\omega(G-S) \geq (k-2)|S|+3$, 则 $t \geq (k-2)s+3$. 令 $t-(k-2)s-3=m$. 假设 $m \geq 1$, 则对 G_2 中的 $(t-1)K_1$ 中任意选取 mK_1 并且对 mK_1 与 $K_{n-s-(t-1)}$ 之间加上所有可能的边使之形成完全图, 由此得到结果图

$$\tilde{G} \cong K_s \vee (K_{n-(k-1)s-2} \cup ((k-2)s+2)K_1)$$

很明显

$$\sum_{uv \in E(G_2)} X(u)X(v) \leq \sum_{uv \in E(\tilde{G})} X(u)X(v)$$

综上所述

$$\sum_{uv \in E(G)} X(u)X(v) \leq \sum_{uv \in E(\tilde{G})} X(u)X(v)$$

令 X 表示为 $\tilde{G}^c$ 对应于谱半径 ρ 的特征向量。

根据 Rayleigh 定理及上述过程, 有

$$\begin{aligned} \rho(\tilde{G}^c) &= X^T(J-I-A(\tilde{G}))X \\ &= X^T(J_n-I_n)X - \sum_{uv \in E(\tilde{G})} X(u)X(v) \\ &\leq X^T(J-I-A(G))X \leq \rho(G^c) \end{aligned}$$

由上 $t \geq (k-2)s+3$, 则 $n \geq t+s \geq (k-1)s+3$. 根据定理 1 可知, 当 $k \geq 5$ 并且 $n \geq k+2$ 时, 有 $\rho((G^*)^c) \leq \rho((\tilde{G})^c)$ 当且仅当 $\tilde{G} \cong G^*$ 时取等. 因此, 在 G 是 n 阶连通图并且 $n \geq k+2$ 和 $k \geq 5$ 的限制下, 如果 G 不存在支撑 k 树, 则 $\rho((G^*)^c) \leq \rho(G^c)$. 根据其逆否命题可知, 在 G 是 n 阶连通图并且 $n \geq k+2$ 和 $k \geq 5$ 的限制下, 如果 $\rho(G^c) < \rho((G^*)^c)$, 则 G 存在支撑 k 树。

参考文献:

- [1] BROUWER A, HAEMERS W. Eigenvalues and Perfect Matchings[J]. Linear Algebra and its Applications, 2005, 395: 156-162.
- [2] DING G, JOHNSON T, SEYMOUR P. Spanning Trees with Many Leaves[J]. Journal of Graph Theory, 2001, 37: 189-197.
- [3] GARGANO L, HAMMAR M, HELL P, et al. Spanning Spiders and Light-splitting Switches[J]. Discrete Mathematics, 2004, 285: 83-95.
- [4] NEUMANN L, EDUARDO R. Spanning Trees with Bounded Degrees[J]. Combinatorica, 1991, 11: 55-61.
- [5] KYAW A. A Sufficient Condition for a Graph to have a k -tree[J]. Graphs and Combinatorics, 2001, 17: 113-121.
- [6] NEUMANN-LARA V, RIVERA-CAMPO E. Spanning Trees with Bounded Degrees[J]. Combinatorica, 1991, 11: 55-61.

- [7] LI S, ZHANG M. On the Signless Laplacian Index of Cacti with a Given Number of Pendant Vertices[J]. Linear Algebra and its Applications, 2012, 436: 4400–4411.
- [8] SUIL O. Spectral Radius and Matchings in Graphs[J]. Linear Algebra and its Applications, 2021, 614: 316–324.
- [9] ZHANG Y, LIN H. Perfect Matching and Distance Spectral Radius in Graphs and Bipartite Graphs [J]. Discrete Applied Mathematics, 2021, 304: 315–322.
- [10] CIOABA S, GREGORY D, HAEMERS W. Matchings in Regular Graphs from Eigenvalue[J]. Journal of Combinatorial Theory, 2009, 99: 287–297.
- [11] GU X, LIU M. A Tight Lower Bound on the Matching Number of Graphs Via Laplacian Eigenvalues [J]. European Journal of Combinatorics, 2022, 101: 103–468.
- [12] FAN D, GORYAINOV S, HUANG X, et al. The Spanning k -trees, Perfect Matchings and Spectral Radius of Graphs [J]. Linear and Multilinear Algebra, 2022, 70: 7264–7275.
- [13] WIN S. On a Connection between the Existence of k -trees and the Toughness of a Graph[J]. Graphs and Combinatorics, 1989, 5: 201–205.

Spanning k -trees and the Spectral Radius of Complements of Connected Graphs

QIU Huan¹, YANG Xiao-bo², WANG Guo-ping^{3*}

(1. Mathematics Group, Yanta No. 3 Middle School, Xi'an, Shanxi, 710000, China;

2. Mathematics Group, Zhaotong Municipal Experimental Primary School, Zhaotong, Yunnan, 657000, China;

3. School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi, Xinjiang, 830017, China)

Abstract: Let G be a simple connected undirected graph without multiple edges and loops. If G has a spanning subgraph that is a tree T , and for any vertex $v \in V(T)$, it holds that $d_T(v) \leq k$, then it is called that G exists a spanning k tree. Let $A(G)$ be the adjacency matrix of G , and the adjacency matrix of G^c is $A(G^c) = J_n - I_n - A(G)$. $\rho(G^c)$ is called the largest eigenvalue of $A(G^c)$, and then it is also called spectral radius of G^c . In this paper, It is assumed that G is a connected graph of order n and that $n \geq k + 2$ and $k \geq 5$ are defined. If $\rho(G^c) < \rho((G^*)^c)$, then G exists a spanning k -tree, where $G^* \cong K_1 \vee (K_{n-k-1} \cup kK_1)$.

Keywords: Spanning k -tree; Spectral radius; Connected graphs