

具有迷向贝瓦尔德曲率的扭积芬斯勒度量

韩江慧, 何 勇*, 郑逢雨, 罗丽欣
(新疆师范大学 数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘 要: 文章主要研究由 Marcal 和沈忠民于 2020 年提出的扭积芬斯勒度量。设 dt^2 和 α^2 分别是黎曼流形 R 和 R^n 上的欧氏度量, 扭积芬斯勒度量是在乘积流形 $R \times R^n$ 上赋予的芬斯勒度量 $F = \alpha \sqrt{\phi(z, \rho)}$, 其中 $z = \frac{dt}{\alpha}$, $\rho = |\bar{x}|$, ϕ 是 R^2 上的正值函数。文章证明了具有迷向贝瓦尔德曲率的扭积芬斯勒度量是贝瓦尔德度量, 给出了扭积芬斯勒度量具有相对迷向 Landsberg 曲率的必要条件。

关键词: 芬斯勒度量; 扭积; 贝瓦尔德度量; 迷向贝瓦尔德曲率; 相对迷向 Landsberg 曲率

中图分类号: O186.1 **文献标识码:** A **文章编号:** 1008-9659(2025)03-0051-11

在芬斯勒几何中, 贝瓦尔德曲率、迷向贝瓦尔德曲率、Landsberg 曲率和相对迷向 Landsberg 曲率是几类非常重要的非黎曼几何量。1926 年, Berwald^[1-2] 定义了贝瓦尔德曲率, 贝瓦尔德曲率是测地系数的三阶偏导数。若芬斯勒度量的贝瓦尔德曲率为零, 则称其为贝瓦尔德度量^[3]。具有贝瓦尔德度量的流形被称为贝瓦尔德流形。1976 年, Ichijyo^[4] 证明了贝瓦尔德流形的所有切空间彼此线性等距。2005 年, Cheng 等人^[5] 引入了迷向贝瓦尔德曲率, 并证明了具有迷向贝瓦尔德曲率的芬斯勒度量等价于其是具有相对迷向 Landsberg 曲率的道格拉斯度量。

1907 年, Landsberg^[6-7] 引入了第一个非黎曼几何量。1928 年, Berwald^[8] 利用贝瓦尔德联络刻画了这个几何量, 并称之为 Landsberg 曲率。2001 年, Shen^[3] 给出了 Landsberg 曲率的另一种定义, 即 Landsberg 曲率是嘉当挠率沿测地线的变化率, Landsberg 曲率为零的芬斯勒度量被称为 Landsberg 度量。2004 年, Shen^[9] 提出了相对迷向 Landsberg 曲率的概念, 并研究了 Randers 度量的相对迷向 Landsberg 曲率。迷向贝瓦尔德曲率和相对迷向 Landsberg 曲率吸引了众多学者的关注^[10-11], 这对深入研究芬斯勒度量的性质具有重要意义。

扭曲积是黎曼几何和芬斯勒几何中构造具有特殊曲率性质的重要方法。Bishop 等人在 1969 年引入了扭曲积的概念, 并用其构造了一类具有负截面曲率的完备黎曼度量。设 (M, ds_1^2) 和 (N, ds_2^2) 是两个黎曼流形, 扭曲积黎曼度量是在乘积流形 $M \times N$ 上赋予的如下形式的黎曼度量^[12]

$$ds^2 = ds_1^2 + f^2 ds_2^2$$

其中, 扭曲函数 f 是 M 上的光滑函数。Dobarro 等人^[13] 研究了扭曲积黎曼度量的数量曲率。Bertola 等人^[14] 对具有常截面曲率或满足爱因斯坦条件的扭曲积黎曼度量进行了分类。

随着广义相对论的发展, 扭曲积的研究取得了前所未有的进展。2001 年, Kozma 等人^[15] 在乘积流形 $M_1 \times M_2$ 上定义了具有如下形式的扭曲积芬斯勒度量

$$F = \sqrt{F_1^2 + f^2 F_2^2}$$

其中, F_1 和 F_2 分别是 M_1 和 M_2 上的芬斯勒度量, 扭曲函数 f 是 M_1 上的光滑函数。他们还给出了扭曲积芬斯勒度量的嘉当联络表达式^[15]。Hushmandi 等人^[16] 得到了扭曲积芬斯勒度量分别是黎曼度量、Landsberg 度量、

[收稿日期] 2024-08-26

[修回日期] 2024-09-09

[基金项目] 国家自然科学基金项目(12261088; 11761069)。

[作者简介] 韩江慧(1997-), 女, 硕士研究生, 主要从事多复变与复几何方面研究, E-mail: hanjianghui1029@163.com.

* [通讯作者] 何 勇(1979-), 男, 教授, 主要从事多复变与复几何方面研究, E-mail: heyong@xjnu.edu.com.

贝瓦尔德度量的充要条件。Peyghan 等人^[17]证明了具有相对迷向 Landsberg 曲率的双扭曲积芬斯勒度量是 Landsberg 度量。Yang 等人^[18]证明了具有迷向平均贝瓦尔德曲率的双扭曲积芬斯勒度量是弱贝瓦尔德度量。

Chen 等人^[19]为了深入研究爱因斯坦芬斯勒度量,在乘积流形 $R \times M$ 上引入了一类芬斯勒度量,并称之为扭积芬斯勒度量。设 (R, dt^2) 和 (M, α^2) 是两个黎曼流形,在乘积流形 $R \times M$ 上定义具有 $F^2 = dt^2 + f^2(t)\alpha^2$

形式的芬斯勒度量,也可以表示为 $F = \alpha \sqrt{\left(\frac{dt}{\alpha}\right)^2 + f^2(t)}$. 设 $z = \frac{dt}{\alpha}$, 又可将上述定义推广为

$$F = \alpha \sqrt{\phi(z, t)}$$

其中, ϕ 是 R^2 上的正值函数。Liu 等人^[20]给出了扭积芬斯勒度量是贝瓦尔德度量的充要条件。Gabrani 等人^[21]证明了具有迷向贝瓦尔德曲率的扭积芬斯勒度量是 Randers 度量,并得到了扭积芬斯勒度量是 Landsberg 度量的充分条件。Yang 等人^[22]给出了扭积芬斯勒度量具有相对迷向 Landsberg 曲率的微分方程刻画,并用扭积给出了具有相对迷向 Landsberg 曲率的芬斯勒度量的案例。

2020 年, Marcal 等人^[23]给出了具有另一种“扭曲”形式的扭积芬斯勒度量的定义,这种新类型的扭积芬斯勒度量与静态时空的度量形式一致。设 R 和 R^n 分别是具有欧氏度量 dt^2 和 α^2 的黎曼流形,扭积芬斯勒度量是在乘积流形 $R \times R^n$ 上具有如下形式的芬斯勒度量

$$F = \alpha \sqrt{\phi(z, \rho)}$$

其中, $z = \frac{dt}{\alpha}$, $\rho = |\bar{x}|$, $\bar{x} \in R^n$, ϕ 是 R^2 上的正值函数。这种新类型的扭积芬斯勒度量与 Chen 等人在文献[19]中研究的扭积芬斯勒度量结构相同,但具有另一种“扭曲”。Marcal 等人^[23]还给出了这类扭积芬斯勒度量 Ricci 平坦的微分方程刻画,并用扭积显示构造出 Ricci 平坦的芬斯勒度量。Chávez^[24]证明了扭积芬斯勒度量是贝瓦尔德度量当且仅当它是 Landsberg 度量。众所周知,迷向贝瓦尔德曲率和相对迷向 Landsberg 曲率分别是贝瓦尔德曲率和 Landsberg 曲率的推广。一个自然的问题是研究扭积芬斯勒度量的迷向贝瓦尔德曲率和相对迷向 Landsberg 曲率。

文章由 Marcal 和沈忠民定义的扭积芬斯勒度量出发,主要研究具有迷向贝瓦尔德曲率的扭积芬斯勒度量,探究扭积芬斯勒度量具有相对迷向 Landsberg 曲率的必要条件。

1 预备知识

本节简要回顾关于芬斯勒几何的一些基本概念,并约定符号。

设 M 是一个 n 维光滑流形,其局部坐标为 $x = (x^1, \dots, x^n)$. 设 $T_x M$ 表示 $x \in M$ 的切空间,其局部坐标为 $(x, y) = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$, 设 $TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$ 表示 M 的切丛。

定义 1^[25] 光滑流形 M 上的芬斯勒度量是函数 $F: TM \rightarrow R^+$, 且满足

- (i) 正则性: F 在 $\tilde{M} = TM - \{ \text{零截面} \}$ 上是光滑函数;
- (ii) 正齐性: $F(x, \lambda y) = \lambda F(x, y), \forall \lambda > 0$;
- (iii) 强凸性: $n \times n$ 阶黑塞矩阵

$$(g_{AB}) = \left(\left[\frac{1}{2} F^2 \right]_{y^A y^B} \right)$$

在 $\tilde{M}$ 上是正定矩阵。

定义 2^[3] 芬斯勒度量 F 诱导一个喷射 $G := y^A \frac{\partial}{\partial x^A} - 2G^A \frac{\partial}{\partial y^A}$, 其中喷射系数为

$$G^A := \frac{1}{4} g^{AC} [(F^2)_{x^A y^C} y^B - (F^2)_{x^C}] \quad (1)$$

定义 3^[3] 芬斯勒度量 F 的嘉当挠率 $C: T_x M \times T_x M \times T_x M \rightarrow R$ 定义为 $C = C_{ABC} dx^A \otimes dx^B \otimes dx^C$, 其中嘉当挠率系数为

$$C_{ABC} := \frac{1}{2} \frac{\partial g_{AB}}{\partial y^C} \quad (2)$$

F 是黎曼度量当且仅当 $C_{ABC} = 0$.

定义 4^[3] 芬斯勒度量 F 的贝瓦尔德曲率 $B: T_x M \otimes T_x M \otimes T_x M \rightarrow T_x M$ 定义为 $B = B_A{}^D{}_{BC} dx^A \otimes dx^B \otimes dx^C \otimes \frac{\partial}{\partial x^D} \Big|_x$, 其中贝瓦尔德曲率系数为

$$B_A{}^D{}_{BC} := \frac{\partial^3 G^D}{\partial y^A \partial y^B \partial y^C} \quad (3)$$

F 是贝瓦尔德度量当且仅当 $B_A{}^D{}_{BC} = 0$.

定义 5^[5] 设 F 是一个芬斯勒度量。若 M 上存在标量函数 $c(x)$, 使得 F 的贝瓦尔德曲率系数满足

$$B_A{}^D{}_{BC} = c(x) (F_{y^A y^B} \delta^D_C + F_{y^A y^C} \delta^D_B + F_{y^B y^C} \delta^D_A + F_{y^A y^B y^C} y^D) \quad (4)$$

则称 F 具有迷向贝瓦尔德曲率。

定义 6^[3] 芬斯勒度量 F 的 Landsberg 曲率 $L: T_x M \otimes T_x M \otimes T_x M \rightarrow R$ 定义为 $L = L_{ABC} dx^A \otimes dx^B \otimes dx^C$, 其中 Landsberg 曲率系数为

$$L_{ABC} := C_{ABC|D} y^D$$

其中, “|” 表示关于贝瓦尔德联络的水平协变导数。Landsberg 曲率系数还可以表示为

$$L_{ABC} := -\frac{1}{2} y_D B_A{}^D{}_{BC}$$

F 是 Landsberg 度量当且仅当 $L_{ABC} = 0$.

定义 7^[9] 设 F 是一个芬斯勒度量。若 M 上存在标量函数 $c(x)$, 使得 F 的 Landsberg 曲率系数满足

$$L_{ABC} + c(x) F C_{ABC} = 0 \quad (5)$$

则称 F 具有相对迷向 Landsberg 曲率。

下面介绍由 Marcal 等人给出的扭积芬斯勒度量的定义及基本几何量。

设 R 和 R^n 分别是 1 维和 n 维黎曼流形, (x^0) 和 $(x^1, \dots, x^n)$ 分别为 R 和 R^n 上的局部坐标。设 TR 和 TR^n 分别表示 R 和 R^n 的切丛, (x^0, y^0) 和 $(x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ 分别为 TR 和 TR^n 上的局部坐标。设乘积流形 $M = R \times R^n$, 则其维数为 $1 + n$, 它的局部坐标为 $(x^0, x^1, \dots, x^n)$, 它的切丛 TM 的局部坐标为 $(x^0, x^1, \dots, x^n, y^0, y^1, \dots, y^n)$, 且有自然同构 $TM \cong TR \oplus TR^n$, 并记 $\bar{x} = (x^1, \dots, x^n)$, $\bar{y} = (y^1, \dots, y^n)$ 。

设 $\tilde{R} = TR - \{\text{零截面}\}$, $\tilde{R}^n = TR^n - \{\text{零截面}\}$, $\tilde{M} = \tilde{R} \times \tilde{R}^n \subset TM - \{\text{零截面}\}$ 。

定义 8^[23] 设 (R, dt^2) 和 (R^n, α^2) 是两个黎曼流形。扭积芬斯勒度量是在乘积流形 $M = R \times R^n$ 上赋予的具有如下形式的芬斯勒度量 $F: \tilde{M} \rightarrow R^+$

$$F = \alpha \sqrt{\phi(z, \rho)} \quad (6)$$

其中, $\alpha = |\bar{y}|$, $z = \frac{y^0}{\alpha}$, $\rho = |\bar{x}|$, ϕ 是 R^2 上的正值函数。

为了后续研究方便, 下面回顾以下记号

$$|\bar{y}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n y^i y^i}, |\bar{x}| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x^i x^i}, \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x^i y^i \quad (7)$$

其中, $|\cdot|$ 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 分别表示 R^n 上的欧几里德范数和内积。

文章采用爱因斯坦求和约定, 并对指标做以下约定

$$0 \leq A, B, C, \dots, \leq n$$

$$1 \leq i, j, k, \dots, \leq n$$

扭积芬斯勒度量 F 的基本张量矩阵 (g_{AB}) 为^[23]

$$(g_{AB}) = \begin{pmatrix} g_{00} & g_{0k} \\ g_{j0} & g_{jk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \phi_z & \frac{1}{2} \Omega_z \frac{y^k}{\alpha} \\ \frac{1}{2} \Omega_z \frac{y^j}{\alpha} & \frac{1}{2} \Omega \delta_{jk} - \frac{1}{2} z \Omega_z \frac{y^j y^k}{\alpha^2} \end{pmatrix} \quad (8)$$

其中

$$\Omega = 2\phi - z\phi_z \quad (9)$$

(g_{AB}) 的行列式为^[23]

$$\det(g_{AB}) = \frac{1}{2^{n+1}} \Omega^{n-1} \Lambda$$

其中

$$\Lambda = 2\phi\phi_{zz} - \phi_z^2$$

引理 1^[23] 设 $F = \alpha \sqrt{\phi(z, \rho)}$ 是扭积芬斯勒度量, 则 F 是强凸的当且仅当 $\Omega, \Lambda > 0$.

命题 1^[26] 设 $F = \alpha \sqrt{\phi(z, \rho)}$ 是扭积芬斯勒度量, 则有以下等式

$$z_{y^0} = \frac{1}{\alpha}, \alpha_{y^l} = \frac{y^l}{\alpha}, z_{y^l} = -\frac{zy^l}{\alpha^2} \quad (10)$$

$$F_{y^0 y^0} = \frac{\Lambda}{4\alpha \sqrt{\phi^3}}, F_{y^0 y^l} = -\frac{z\Lambda}{4\alpha^2 \sqrt{\phi^3}} y^l \quad (11)$$

$$\Omega_z = \phi_z - z\phi_{zz}, \Omega_{zz} = -z\phi_{zzz}, \Lambda_z = 2\phi\phi_{zz} \quad (12)$$

根据式(10)和式(11)的第一个等式和式(12)的第三个等式, 经简单计算, 易得以下命题。

命题 2 设 $F = \alpha \sqrt{\phi(z, \rho)}$ 是扭积芬斯勒度量, 则有以下等式

$$F_{y^0 y^0 y^0} = \frac{\phi_{zzz}}{2\alpha^2 \sqrt{\phi}} - \frac{3\phi_z \Lambda}{8\alpha^2 \sqrt{\phi^5}} \quad (13)$$

$$F_{y^0 y^0 y^l} = -\frac{z\phi_{zzz}}{2\alpha^3 \sqrt{\phi}} y^l - \frac{\Lambda}{4\alpha^3 \sqrt{\phi^3}} y^l + \frac{3z\phi_z \Lambda}{8\alpha^3 \sqrt{\phi^5}} y^l \quad (14)$$

2 扭积芬斯勒度量的迷向贝瓦尔德曲率

任意贝瓦尔德度量一定具有迷向贝瓦尔德曲率, 但具有迷向贝瓦尔德曲率的芬斯勒度量不一定是贝瓦尔德度量^[5]。本节将研究具有迷向贝瓦尔德曲率的扭积芬斯勒度量是否为贝瓦尔德度量。

命题 3^[24] 设 $F = \alpha \sqrt{\phi(z, \rho)}$ 是扭积芬斯勒度量, 则 F 的贝瓦尔德曲率系数 B_{ABC}^D 为

$$B_{000}^0 = \frac{s}{\alpha} E_{zzz} \quad (15)$$

$$B_{00l}^0 = B_{0l0}^0 = B_{l00}^0 = \frac{1}{\alpha} E_{zz} x^l - \frac{s}{\alpha^2} (E_{zz} + zE_{zzz}) y^l \quad (16)$$

$$B_{0kl}^0 = B_{k0l}^0 = B_{klo}^0 = sz(zE_{zzz} + 3E_{zz}) \frac{y^k y^l}{\alpha^3} - zE_{zz} \left(\frac{x^k y^l + x^l y^k}{\alpha^2} \right) - szE_{zz} \frac{\delta_{kl}}{\alpha} \quad (17)$$

$$B_{jkl}^0 = \frac{s}{\alpha^4} \left(E - zE_z - 2z^2 E_{zz} - \frac{1}{3} z^3 E_{zzz} \right) (y^j y^k y^l)_{\bar{j}kl} + \frac{1}{\alpha^3} (-E + zE_z + z^2 E_{zz}) (y^j y^k x^l)_{\bar{j}kl} \\ + \frac{1}{\alpha} (E - zE_z) (x^l \delta_{jk})_{\bar{j}kl} + \frac{s}{\alpha^2} (-E + zE_z + z^2 E_{zz}) (y^l \delta_{jk})_{\bar{j}kl} \quad (18)$$

$$B_{0i0}^i = \frac{s}{\alpha^2} H_{zzz} y^i - \frac{1}{\alpha} W_{zzz} x^i \quad (19)$$

$$B_{0il}^i = B_{0li}^i = B_{l0i}^i = -\frac{s}{\alpha^3} (2H_{zz} + zH_{zzz}) y^i y^l + \frac{1}{\alpha^2} H_{zz} y^i x^l + \frac{z}{\alpha^2} W_{zzz} y^l x^i + \frac{s}{\alpha} H_{zz} \delta_{il} \quad (20)$$

$$B_{0kl}^i = B_{k0l}^i = B_{klo}^i = \frac{s}{\alpha^4} (3H_z + 5zH_{zz} + z^2 H_{zzz}) y^i y^k y^l - \frac{s}{\alpha^2} (H_z + zH_{zz}) (y^i \delta_{kl})_{\bar{i}kl} - \frac{1}{\alpha^3} (H_z + zH_{zz}) (x^l y^k y^i + x^k y^l y^i) \\ + \frac{1}{\alpha} H_z (x^l \delta_{ik} + x^k \delta_{il}) + \frac{1}{\alpha^3} (W_z - zW_{zz} - z^2 W_{zzz}) x^i y^k y^l - \frac{1}{\alpha} (W_z - zW_{zz}) x^i \delta_{kl} \quad (21)$$

$$B_{jkl}^i = \frac{s}{\alpha^5} (-15zH_z - 9z^2 H_{zz} - z^3 H_{zzz}) y^i y^j y^k y^l + (3zH_z + z^2 H_{zz}) \left(\frac{1}{\alpha^4} y^i x^j y^k y^l + \frac{s}{\alpha^3} y^k y^l \delta_{ij} + \frac{s}{\alpha^3} y^k y^i \delta_{jl} \right)_{\bar{j}kl} \\ - \frac{1}{\alpha^2} zH_z [(x^j y^i + \alpha s \delta_{ij}) \delta_{kl} + (x^l \delta_{ik} + x^k \delta_{il}) y^j]_{\bar{j}kl} - \frac{1}{\alpha^4} (3zW_z - 3z^2 W_{zz} - z^3 W_{zzz}) x^i y^j y^k y^l + \frac{z}{\alpha^2} (W_z - zW_{zz}) x^i (y^j \delta_{kl})_{\bar{j}kl} \quad (22)$$

其中, $(\cdot)_{\bar{a}b}$ 表示指标循环, 且

$$s = \frac{\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle}{\alpha}, E = U + zV, H = V + W$$

$$U = \frac{2\phi\phi_{\bar{z}} - \phi_z\phi_{\bar{z}}}{2\rho(2\phi\phi_{\bar{z}} - \phi_z^2)}, V = \frac{\phi_{\bar{z}}\phi_{zz} - \phi_z\phi_{\bar{z}z}}{2\rho(2\phi\phi_{\bar{z}} - \phi_z^2)}, W = \frac{\phi_{\bar{z}}}{2\rho(2\phi - z\phi_z)}$$

引理 2^[23] 设 $F = \alpha\sqrt{\phi(z, \rho)}$ 是扭积芬斯勒度量。 $\forall n \geq 2, P\alpha^2 + Q < \bar{x}, \bar{y} >^2 = 0$, 当且仅当 $P = Q = 0$, 其中 P, Q 均是关于 z 和 ρ 的函数。

命题 4 设 $F = \alpha\sqrt{\phi(z, \rho)}$ 是扭积芬斯勒度量。 $\forall n \geq 2$,

$$P\alpha^2 x^l + Q < \bar{x}, \bar{y} >^2 y^l = 0 \quad (23)$$

当且仅当 $P = Q = 0$, 其中 P, Q 均是关于 z 和 ρ 的函数。

证明 充分性显然成立, 下面证明必要性。假设式(23)成立, 式(23)两边同时与 x^l 缩并, 可得

$$P\rho^2 \alpha^2 + Q < \bar{x}, \bar{y} >^2 = 0$$

注意 $\rho^2 \neq 0$, 根据引理 2, 由上式可以得到 $P = Q = 0$ 。

定理 1 设 $F = \alpha\sqrt{\phi(z, \rho)}$ 是扭积芬斯勒度量。若 F 具有迷向贝瓦尔德曲率, 则 F 是贝瓦尔德度量。

证明 设 F 具有迷向贝瓦尔德曲率, 则式(4)成立。令式(4)中 $A = B = C = D = 0$, 则有

$$B_0^0{}_{00} = c(x)(3F_{y^0 y^0} + F_{y^0 y^0 y^0} y^0) \quad (24)$$

将式(15)代入式(24), 易得

$$\frac{s}{\alpha} E_{zz} = c(x)(3F_{y^0 y^0} + F_{y^0 y^0 y^0} y^0) \quad (25)$$

将式(11)的第一个等式和式(13)代入式(25), 经化简可得

$$E_{zz} < \bar{x}, \bar{y} > = c(x) \left(\frac{3\Lambda}{4\sqrt{\phi^3}} + \frac{z\phi_{zz}}{2\sqrt{\phi}} - \frac{3z\phi_z \Lambda}{8\sqrt{\phi^5}} \right) \alpha \quad (26)$$

令式(4)中 $A = B = D = 0, C = l$, 则有

$$B_0^0{}_{0l} = c(x)(2F_{y^0 y^l} + F_{y^0 y^0 y^l} y^0) \quad (27)$$

将式(16)代入式(27), 易得

$$\frac{1}{\alpha} E_{zz} x^l - \frac{s}{\alpha^2} (E_{zz} + zE_{zzz}) y^l = c(x)(2F_{y^0 y^l} + F_{y^0 y^0 y^l} y^0) \quad (28)$$

将式(11)的第二个等式和式(14)代入式(28), 经化简整理可得

$$E_{zz} \alpha^2 x^l - (E_{zz} + zE_{zzz}) < \bar{x}, \bar{y} > y^l = -c(x) z \left(\frac{3\Lambda}{4\sqrt{\phi^3}} + \frac{z\phi_{zz}}{2\sqrt{\phi}} - \frac{3z\phi_z \Lambda}{8\sqrt{\phi^5}} \right) \alpha y^l \quad (29)$$

式(26)两边同时乘以 $-zy^l$ 再代入式(29), 可得

$$E_{zz} \alpha^2 x^l - E_{zz} < \bar{x}, \bar{y} > y^l = 0$$

根据命题 4, 由上式可以得到

$$E_{zz} = 0 \quad (30)$$

式(30)两边同时关于 z 微分, 易得

$$E_{zzz} = 0 \quad (31)$$

将式(31)代入式(26), 并注意 $\alpha \neq 0$, 可得

$$c(x) \left(\frac{3\Lambda}{4\sqrt{\phi^3}} + \frac{z\phi_{zz}}{2\sqrt{\phi}} - \frac{3z\phi_z \Lambda}{8\sqrt{\phi^5}} \right) = 0 \quad (32)$$

令式(4)中 $A = B = C = 0, D = i$, 则有

$$B_0^i{}_{00} = c(x) F_{y^0 y^0 y^i} y^i \quad (33)$$

将式(19)代入式(33),易得

$$\frac{s}{\alpha^2} H_{zz} y^i - \frac{1}{\alpha} W_{zz} x^i = c(x) F_{y^a y^a y^i} \quad (34)$$

将式(13)代入式(34),经化简可得

$$H_{zz} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle y^i - W_{zz} \alpha^2 x^i = c(x) \left(\frac{\phi_{zz}}{2\sqrt{\phi}} - \frac{3\phi_z \Lambda}{8\sqrt{\phi^5}} \right) \alpha y^i \quad (35)$$

令式(4)中 $A = B = 0, C = l, D = i$, 则有

$$B_0^i{}_{0l} = c(x) (F_{y^a y^a} \delta_l^i + F_{y^a y^a y^i} y^i) \quad (36)$$

将式(20)代入式(36),易得

$$-\frac{s}{\alpha^3} (2H_{zz} + zH_{zz}) y^i y^l + \frac{1}{\alpha^2} H_{zz} y^i x^l + \frac{z}{\alpha^2} W_{zz} y^l x^i + \frac{s}{\alpha} H_{zz} \delta_l^i = c(x) (F_{y^a y^a} \delta_l^i + F_{y^a y^a y^i} y^i) \quad (37)$$

将式(11)的第一个等式和式(14)代入式(37),经化简整理可得

$$\begin{aligned} & -(2H_{zz} + zH_{zz}) \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle y^i y^l + H_{zz} \alpha^2 y^i x^l + zW_{zz} \alpha^2 y^l x^i + H_{zz} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \alpha^2 \delta_l^i \\ & = c(x) \frac{\Lambda}{4\sqrt{\phi^3}} \alpha^3 \delta_l^i - c(x) \left(\frac{z\phi_{zz}}{2\sqrt{\phi}} + \frac{\Lambda}{4\sqrt{\phi^3}} - \frac{3z\phi_z \Lambda}{8\sqrt{\phi^5}} \right) \alpha y^i y^l \end{aligned} \quad (38)$$

式(35)两边同时乘以 $-zy^l$ 再代入式(38),移项整理可得

$$H_{zz} (-2 \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle y^i y^l + \alpha^2 y^i x^l + \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \alpha^2 \delta_l^i) - c(x) \frac{\Lambda}{4\sqrt{\phi^3}} (\alpha^3 \delta_l^i - \alpha y^i y^l) = 0 \quad (39)$$

式(39)两边同时依次与 x^l, x^i 缩并,可以得到

$$H_{zz} (-2 \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^3 + 2 \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \rho^2 \alpha^2) - c(x) \frac{\Lambda}{4\sqrt{\phi^3}} (\rho^2 \alpha^3 - \alpha \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2) = 0$$

经整理可得

$$\left(2H_{zz} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle - c(x) \frac{\Lambda}{4\sqrt{\phi^3}} \alpha \right) \rho^2 \alpha^2 + \left(-2H_{zz} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + c(x) \frac{\Lambda}{4\sqrt{\phi^3}} \alpha \right) \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2 = 0$$

根据引理2,由上式可以得到

$$2H_{zz} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = c(x) \frac{\Lambda}{4\sqrt{\phi^3}} \alpha \quad (40)$$

式(40)两边同时关于 z 微分,并将式(12)的第三个等式代入,可以得到

$$2H_{zz} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle = c(x) \left(\frac{\phi_{zz}}{2\sqrt{\phi}} - \frac{3\phi_z \Lambda}{8\sqrt{\phi^5}} \right) \alpha \quad (41)$$

式(41)两边同时乘以 y^i 再与式(35)作差,移项整理可得

$$W_{zz} \alpha^2 x^i + H_{zz} \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle y^i = 0$$

令 $i = l$, 根据命题4,可以得到

$$W_{zz} = H_{zz} = 0 \quad (42)$$

将式(42)代回式(35),并注意 $\alpha \neq 0$, 易得

$$c(x) \left(\frac{\phi_{zz}}{2\sqrt{\phi}} - \frac{3\phi_z \Lambda}{8\sqrt{\phi^5}} \right) y^i = 0 \quad (43)$$

式(32)两边同时乘以 y^i , 可得

$$c(x) \left(\frac{3\Lambda}{4\sqrt{\phi^3}} + \frac{z\phi_{zz}}{2\sqrt{\phi}} - \frac{3z\phi_z \Lambda}{8\sqrt{\phi^5}} \right) y^i = 0 \quad (44)$$

式(43)两边同时乘以 z 再代入式(44),可得

$$c(x) \frac{3\Lambda}{4\sqrt{\phi^3}} y^i = 0$$

根据引理1, $\Lambda \neq 0$, 得到 $c(x) = 0$, 即 F 是贝瓦尔德度量。

3 扭积芬斯勒度量的相对迷向 Landsberg 曲率

本节将研究具有相对迷向 Landsberg 曲率的扭积芬斯勒度量。为此, 首先推导扭积芬斯勒度量的嘉当挠率表达式。

命题5 设 $F = \alpha \sqrt{\phi(z, \rho)}$ 是扭积芬斯勒度量, 则 F 的嘉当挠率系数 C_{ABC} 为

$$C_{000} = \frac{1}{4\alpha} \phi_{zzz} \quad (45)$$

$$C_{00l} = C_{0l0} = C_{l00} = -\frac{z}{4\alpha^2} \phi_{zz} y^l \quad (46)$$

$$C_{0kl} = C_{k0l} = C_{kl0} = \frac{1}{4\alpha} \Omega_z \delta_{kl} - \frac{1}{4\alpha^3} (\Omega_z - z^2 \phi_{zz}) y^k y^l \quad (47)$$

$$C_{jkl} = -\frac{z}{4\alpha^2} \Omega_z (y^l \delta_{jk})_{\bar{j}kl} + \frac{z}{4\alpha^4} (3\Omega_z - z^2 \phi_{zz}) y^j y^k y^l \quad (48)$$

证明 令式(2)中 $A = j, B = k, C = l$, 并将式(8)代入, 经直接计算有

$$\begin{aligned} C_{jkl} &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{jk}}{\partial y^l} \\ &= \frac{1}{4} \frac{\partial \left(\Omega \delta_{jk} - z \Omega_z \frac{y^j y^k}{\alpha^2} \right)}{\partial y^l} \\ &= \frac{1}{4} \left[\Omega_z z_{y^l} \delta_{jk} - \frac{z_{y^l} \Omega_z y^j y^k \alpha^2 + z \Omega_{zz} z_{y^l} y^j y^k \alpha^2 + z \Omega_z \delta_{jl} y^k \alpha^2 + z \Omega_z y^j \delta_{kl} \alpha^2 - 2\alpha \alpha_{y^l} z \Omega_z y^j y^k}{\alpha^4} \right] \\ &= -\frac{z}{4\alpha^2} \Omega_z (y^l \delta_{jk})_{\bar{j}kl} + \frac{z}{4\alpha^4} (3\Omega_z - z^2 \phi_{zz}) y^j y^k y^l \end{aligned}$$

其中, 第四个等式推导应用到式(10)的第二个和第三个等式和式(12)的第二个等式。

同理可得式(45)~式(47)成立。

命题6^[24] 设 $F = \alpha \sqrt{\phi(z, \rho)}$ 是扭积芬斯勒度量, 则 F 的 Landsberg 曲率系数 L_{ABC} 为

$$L_{000} = -\frac{s}{4} [\phi_z E_{zzz} + \Omega(H_{zzz} - W_{zzz})] \quad (49)$$

$$L_{00l} = L_{0l0} = L_{l00} = -\frac{1}{4} (\phi_z E_{zz} + \Omega H_{zz}) x^l + \frac{s}{4\alpha} [\phi_z (E_{zz} + z E_{zzz}) + \Omega(H_{zz} + z H_{zzz} - z W_{zzz})] y^l \quad (50)$$

$$\begin{aligned} L_{0kl} = L_{k0l} = L_{kl0} &= -\frac{s}{4\alpha^2} [z \phi_z (z E_{zzz} + 3 E_{zz}) + \Omega(H_z + 3z H_{zz} + z^2 H_{zzz}) \\ &\quad + \Omega(W_z - z W_{zz} - z^2 W_{zzz})] y^k y^l + \frac{z}{4\alpha} (\phi_z E_{zz} + \Omega H_{zz}) (x^l y^k + x^k y^l) \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} L_{jkl} &= -\frac{s}{4\alpha^3} [\phi_z (3E - 3z E_z - 6z^2 E_{zz} - z^3 E_{zzz}) \\ &\quad - \Omega(6z H_z + 6z^2 H_{zz} + z^3 H_{zzz}) - \Omega(3z W_z - 3z^2 W_{zz} - z^3 W_{zzz})] y^j y^k y^l \\ &\quad - \frac{1}{4\alpha^2} [\phi_z (-E + z E_z + z^2 E_{zz}) + \Omega(z H_z + z^2 H_{zz})] (x^j y^k y^l)_{\bar{j}kl} \\ &\quad - \frac{s}{4\alpha} [\phi_z (-E + z E_z + z^2 E_{zz}) + \Omega(2z H_z + z^2 H_{zz} + z W_z - z^2 W_{zz})] (y^l \delta_{jk})_{\bar{j}kl} \\ &\quad - \frac{1}{4} [\phi_z (E - z E_z) - z \Omega H_z] (x^l \delta_{jk})_{\bar{j}kl} \end{aligned} \quad (52)$$

命题 7^[27] 设 $F = \alpha \sqrt{\phi(z, \rho)}$ 是扭积芬斯勒度量, 则 F 是黎曼度量当且仅当 $\phi_z - z\phi_{zz} = 0$.

命题 8 设 $F = \alpha \sqrt{\phi(z, \rho)}$ 是扭积芬斯勒度量. $\forall n \geq 2$,

$$Q(\alpha^2 \delta^{kl} - y^k y^l) = 0 \quad (53)$$

当且仅当 $Q = 0$, 其中 Q 是关于 z 和 ρ 的函数.

证明 充分性显然成立, 下面证明必要性. 假设式(53)成立, 式(53)两边同时依次与 x^l, x^k 缩并, 可得

$$Q(\rho^2 \alpha^2 - \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2) = 0$$

经整理易得

$$Q\rho^2 \alpha^2 - Q\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2 = 0$$

注意 $\rho^2 \neq 0$, 根据引理 2, 由上式可以得到 $Q = 0$.

命题 9 设 $F = \alpha \sqrt{\phi(z, \rho)}$ 是扭积芬斯勒度量. $\forall n \geq 2$,

$$Q \left[3 \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle y^j y^k y^l - \alpha^2 (x^j y^k y^l)_{\bar{j} \bar{l}} - \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \alpha^2 (y^l \delta^{jk})_{\bar{j} \bar{l}} + \alpha^4 (x^l \delta^{jk})_{\bar{j} \bar{l}} \right] = 0 \quad (54)$$

当且仅当 $Q = 0$, 其中 Q 是关于 z 和 ρ 的函数.

证明 充分性显然成立, 下面证明必要性. 假设式(54)成立, 式(54)两边同时依次与 x^j, x^k, x^l 缩并, 经简单而冗长的计算有

$$Q \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^4 - 2Q\rho^2 \alpha^2 \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2 + Q\rho^4 \alpha^4 = 0$$

经移项整理可得

$$(Q\rho^2 \alpha^2 - Q\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2) \rho^2 \alpha^2 - (Q\rho^2 \alpha^2 - Q\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2) \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2 = 0$$

根据引理 2, 由上式可以得到

$$Q\rho^2 \alpha^2 - Q\langle \bar{x}, \bar{y} \rangle^2 = 0 \quad (55)$$

对式(55)再次应用引理 2, 可知 $Q = 0$.

定理 2 设 $F = \alpha \sqrt{\phi(z, \rho)}$ 是扭积芬斯勒度量. 若 F 具有相对迷向 Landsberg 曲率, 则下列情况之一成立

(i) F 是黎曼度量;

(ii) ϕ 满足

$$(W_z - zW_{zz}) \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + c(x) \frac{\phi_z}{2\sqrt{\phi}} \alpha = 0$$

证明 设 F 具有相对迷向 Landsberg 曲率, 则式(5)成立, 即有

$$\begin{cases} L_{000} + c(x)FC_{000} = 0 \\ L_{00l} + c(x)FC_{00l} = 0 \end{cases} \quad (56)$$

$$\begin{cases} L_{0kl} + c(x)FC_{0kl} = 0 \\ L_{jkl} + c(x)FC_{jkl} = 0 \end{cases} \quad (57)$$

$$\begin{cases} L_{0kl} + c(x)FC_{0kl} = 0 \\ L_{jkl} + c(x)FC_{jkl} = 0 \end{cases} \quad (58)$$

$$\begin{cases} L_{0kl} + c(x)FC_{0kl} = 0 \\ L_{jkl} + c(x)FC_{jkl} = 0 \end{cases} \quad (59)$$

将式(45)~式(48)和式(49)~式(52)分别代入式(56)~式(59), 经化简整理可得

$$[\phi_z E_{zzz} + \Omega(H_{zzz} - W_{zzz})] \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle - c(x)F\phi_{zzz} = 0 \quad (60)$$

$$[(\phi_z(E_{zz} + zE_{zzz}) + \Omega(H_{zz} + zH_{zzz} - zW_{zzz})) \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle - c(x)Fz\phi_{zzz}] y^l - (\phi_z E_{zz} + \Omega H_{zz}) \alpha^2 x^l = 0 \quad (61)$$

$$\begin{cases} [(z\phi_z(zE_{zzz} + 3E_{zz}) + \Omega(H_z + 3zH_{zz} + z^2H_{zzz} + W_z - zW_{zz} - z^2W_{zzz})) \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + c(x)F(\Omega_z - z^2\phi_{zzz})] y^k y^l - \\ z(\phi_z E_{zz} + \Omega H_{zz}) \alpha^2 (x^l y^k + x^k y^l) - [(z\phi_z E_{zz} + \Omega(H_z + zH_{zz} + W_z - zW_{zz})) \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + c(x)F\Omega_z] \alpha^2 \delta_{kl} = 0 \end{cases} \quad (62)$$

$$\begin{cases} [(\phi_z(3E - 3zE_z - 6z^2E_{zz} - z^3E_{zzz}) - \Omega(6zH_z + 6z^2H_{zz} + z^3H_{zzz} + 3zW_z - 3z^2W_{zz} - z^3W_{zzz})) \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle \\ > -c(x)Fz(3\Omega_z - z^2\phi_{zzz})] y^j y^k y^l + [\phi_z(-E + zE_z + z^2E_{zz}) + \Omega(zH_z + z^2H_{zz})] \alpha^2 (x^j y^k y^l)_{\bar{j} \bar{l}} \\ + [(\phi_z(-E + zE_z + z^2E_{zz}) + \Omega(2zH_z + z^2H_{zz} + zW_z - z^2W_{zz})) \langle \bar{x}, \bar{y} \rangle + c(x)Fz\Omega_z] \alpha^2 (y^l \delta_{jk})_{\bar{j} \bar{l}} \\ + [\phi_z(E - zE_z) - z\Omega H_z] \alpha^4 (x^l \delta_{jk})_{\bar{j} \bar{l}} = 0 \end{cases} \quad (63)$$

式(60)两边同时乘以 zy^l ,可得

$$z[(\phi_z E_{zzz} + \Omega(H_{zzz} - W_{zzz})) < \bar{x}, \bar{y} > - c(x)F\phi_{zzz}]y^l = 0 \quad (64)$$

将式(64)代入式(61),经移项整理可得

$$(\phi_z E_{zz} + \Omega H_{zz})\alpha^2 x^l - (\phi_z E_{zz} + \Omega H_{zz}) < \bar{x}, \bar{y} > y^l = 0$$

根据命题4,可以得到

$$\phi_z E_{zz} + \Omega H_{zz} = 0 \quad (65)$$

式(60)两边同时乘以 $z^2 y^k y^l$,可得

$$z^2[(\phi_z E_{zzz} + \Omega(H_{zzz} - W_{zzz})) < \bar{x}, \bar{y} > - c(x)F\phi_{zzz}]y^k y^l = 0 \quad (66)$$

将式(65)代入式(62),式(62)可化简为

$$\begin{aligned} & \left[z^2((\phi_z E_{zzz} + \Omega(H_{zzz} - W_{zzz})) < \bar{x}, \bar{y} > - c(x)F\phi_{zzz}) + \Omega(H_z + W_z - zW_{zz}) < \bar{x}, \bar{y} > \right. \\ & \left. + c(x)F\Omega_z \right] y^k y^l - \left[(\Omega(H_z + W_z - zW_{zz})) < \bar{x}, \bar{y} > + c(x)F\Omega_z \right] \alpha^2 \delta_{kl} = 0 \end{aligned} \quad (67)$$

将式(66)代入式(67),经移项整理可得

$$[\Omega(H_z + W_z - zW_{zz}) < \bar{x}, \bar{y} > + c(x)F\Omega_z](\alpha^2 \delta_{kl} - y^k y^l) = 0$$

根据命题8,由上式可得

$$\Omega(H_z + W_z - zW_{zz}) < \bar{x}, \bar{y} > + c(x)F\Omega_z = 0 \quad (68)$$

式(60)两边同时乘以 $-z^3 y^j y^k y^l$,可得

$$-z^3[(\phi_z E_{zzz} + \Omega(H_{zzz} - W_{zzz})) < \bar{x}, \bar{y} > - c(x)F\phi_{zzz}]y^j y^k y^l = 0 \quad (69)$$

式(68)两边同时乘以 $-3zy^j y^k y^l$,可得

$$-3z[\Omega(H_z + W_z - zW_{zz}) < \bar{x}, \bar{y} > + c(x)F\Omega_z]y^j y^k y^l = 0 \quad (70)$$

式(68)两边同时乘以 $-z\alpha^2(y^l \delta_{jk})_{\bar{j}\bar{k}l}$,可得

$$-z[\Omega(H_z + W_z - zW_{zz}) < \bar{x}, \bar{y} > + c(x)F\Omega_z]\alpha^2(y^l \delta_{jk})_{\bar{j}\bar{k}l} = 0 \quad (71)$$

将式(65)代入式(63),式(63)可化简为

$$\begin{aligned} & \left[3(\phi_z(E - zE_z) - z\Omega H_z) < \bar{x}, \bar{y} > - z^3[(\phi_z E_{zzz} + \Omega(H_{zzz} - W_{zzz})) < \bar{x}, \bar{y} > - c(x)F\phi_{zzz}] \right. \\ & \left. - 3z[\Omega(H_z + W_z - zW_{zz}) < \bar{x}, \bar{y} > + c(x)F\Omega_z] \right] y^j y^k y^l \\ & - [\phi_z(E - zE_z) - z\Omega H_z]\alpha^2(x^j y^k y^l)_{\bar{j}\bar{k}l} - [(\phi_z(E - zE_z) - z\Omega H_z) < \bar{x}, \bar{y} > \\ & + z(\Omega(H_z + W_z - zW_{zz}) < \bar{x}, \bar{y} > + c(x)F\Omega_z)]\alpha^2(y^l \delta_{jk})_{\bar{j}\bar{k}l} \\ & + [\phi_z(E - zE_z) - z\Omega H_z]\alpha^4(x^l \delta_{jk})_{\bar{j}\bar{k}l} = 0 \end{aligned} \quad (72)$$

将式(69)、式(70)和式(71)代入式(72),经整理可得

$$[\phi_z(E - zE_z) - z\Omega H_z] \left[3 < \bar{x}, \bar{y} > y^j y^k y^l - \alpha^2(x^j y^k y^l)_{\bar{j}\bar{k}l} - < \bar{x}, \bar{y} > \alpha^2(y^l \delta_{jk})_{\bar{j}\bar{k}l} + \alpha^4(x^l \delta_{jk})_{\bar{j}\bar{k}l} \right] = 0$$

根据命题9,由上式可得

$$\phi_z(E - zE_z) - z\Omega H_z = 0 \quad (73)$$

式(73)两边同时关于 z 微分,并将式(65)两边同时乘以 $-z$ 代入,可以得到

$$\phi_{zz}(E - zE_z) - \Omega H_z - z\Omega_z H_z = 0 \quad (74)$$

注意 $\phi_z \neq 0$,将式(73)变形后代入式(74),式(74)可化简为

$$\phi_{zz} \frac{z\Omega H_z}{\phi_z} - \Omega H_z - z\Omega_z H_z = 0 \quad (75)$$

将式(12)的第一个等式和式(9)代入式(75),经整理可得

$$2\phi \frac{H_z}{\phi_z} (\phi_z - z\phi_{zz}) = 0$$

则有以下两种情况:

(i) 若 $\phi_z - z\phi_{zz} = 0$, 根据命题7, 易知 F 是黎曼度量;

(ii) 若 $H_z = 0$, 结合式(65), 可得

$$E_{zz} = 0 \quad (76)$$

此时, 式(60)和式(68)分别化简为

$$\Omega W_{zz} < \bar{x}, \bar{y} > + c(x) F \phi_{zz} = 0 \quad (77)$$

$$\Omega (W_z - zW_{zz}) < \bar{x}, \bar{y} > + c(x) F \Omega_z = 0 \quad (78)$$

式(78)两边同时关于 z 微分, 再将式(12)的第二个等式代入, 经整理可得

$$\Omega_z \left[(W_z - zW_{zz}) < \bar{x}, \bar{y} > + c(x) \frac{\phi_z}{2\sqrt{\phi}} \alpha \right] - z(\Omega W_{zz} < \bar{x}, \bar{y} > + c(x) F \phi_{zz}) = 0 \quad (79)$$

式(77)两边同时乘以 $-z$ 再代入式(79), 并注意 $\Omega_z = \phi_z - z\phi_{zz} \neq 0$, 得到

$$(W_z - zW_{zz}) < \bar{x}, \bar{y} > + c(x) \frac{\phi_z}{2\sqrt{\phi}} \alpha = 0$$

4 结论

在乘积芬斯勒流形上, 有三种不同类型的乘积芬斯勒度量被广泛关注和研究。文章主要研究了由 Marcal 和沈忠民引入的扭积芬斯勒度量。一般情况下, 具有迷向贝瓦尔德曲率的芬斯勒度量不一定是贝瓦尔德度量, 但文章证明了具有迷向贝瓦尔德曲率的扭积芬斯勒度量是贝瓦尔德度量。文章还给出了扭积芬斯勒度量具有相对迷向 Landsberg 曲率的必要条件。后期将进一步研究具有其他预定曲率的扭积芬斯勒度量。

参考文献:

- [1] BERWALD L. Untersuchung Der Krümmung Allgemeiner Metrischer Räume Auf Grund Des in Ihnen Herrschenden Parallelismus [J]. Mathematische Zeitschrift, 1926, 25: 40-73.
- [2] BERWALD L. Über Zweidimensionale Allgemeine Metrische Räume [J]. Journal Für Die Reine Und Angewandte Mathematik, 1927, 156: 191-222.
- [3] SHEN Z M. Differential Geometry of Spray and Finsler Spaces [M]. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2001.
- [4] ICHIJYŌ Y. Finsler Manifolds Modeled on a Minkowski Space [J]. Journal of Mathematics of Kyoto University, 1976, 16 (03): 639-652.
- [5] CHENG X Y, SHEN Z M. On Douglas Metrics [J]. Publicationes Mathematicae Debrecen, 2005, 66 (03-04): 503-512.
- [6] LANDSBERG G. Über Die Totalkrümmung [J]. Jahresbericht Der Deutschen Mathematiker Vereinigung, 1907, 16: 36-46.
- [7] LANDSBERG G. Über Die Krümmung in Der Variationsrechnung [J]. Mathematische Annalen, 1908, 65 (03): 313-349.
- [8] BERWALD L. Parallelübertragung in Allgemeinen Räumen [C]. Bologna: Attidel Congresso Internazionale dei Matematici, 1928, 4: 263-270.
- [9] SHEN Z M. Landsberg Curvature, S-Curvature and Riemann Curvature [C]. Britan: Cambridge University Press, 2004: 303-355.
- [10] NAJAFI B, TAYEBI A, REZAI M. On General Relatively Isotropic L-curvature Finsler Metrics [J]. Iranian Journal of Science, 2005, 29 (03): 357-366.
- [11] CHEN G Z, LIU L H. On (α, β) -metrics with Isotropic Berwald Curvature [J]. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 2017, 448 (01): 347-356.
- [12] BISHOP R, O'NEILL B. Manifolds of Negative Curvature [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1969, 145: 1-49.
- [13] DOBARRO F, LAMI D. Scalar Curvature and Warped Products of Riemann Manifolds [J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1987, 303 (01): 161-168.
- [14] BERTOLA M, GOUTHIER D. Warped Products with Special Riemannian Curvature [J]. Boletim da Sociedade Brasileira de

- Matemática, 2001, 32(01):45–62.
- [15] KOZMA L, PETER I, VARGA C. Warped Product of Finsler Manifolds[J]. Annales University Scientiarum Budapestinensis de Rolando Eötvös Nominatae Sectio Mathematica, 2001, 44: 157–170.
- [16] HUSHMANDI A, REZAI M. On Warped Product Finsler Spaces of Landsberg Type[J]. Journal of Mathematical Physics, 2011, 52(09):093506.
- [17] PEYGHAN E, TAYEBI A, NAJAFI B. Doubly Warped Product Finsler Manifolds with Some Non Riemannian Curvature Properties[J]. Annales Polonici Mathematici, 2012, 105(03):293–311.
- [18] YANG Z, HE Y, ZHANG X L. S-curvature of Doubly Warped Product of Finsler Manifolds[J]. Acta Mathematica Sinica, 2020, 36(11):1292–1298.
- [19] CHEN B, SHEN Z M, ZHAO L L. Constructions of Einstein Finsler Metrics by Warped Product[J]. International Journal of Mathematics, 2018, 29(11):1850081.
- [20] LIU H F, MO X H. Finsler Warped Product Metrics of Douglas Type[J]. Canadian Mathematical Bulletin, 2019, 62(01):119–130.
- [21] GABRANI M, REZAEI B, SEVIM E. On Landsberg Warped Product Metrics[J]. Journal of Mathematical Physics, 2021, 17(04):468–483.
- [22] YANG Z, ZHANG X L. Finsler Warped Product Metrics with Relatively Isotropic Landsberg Curvature[J]. Canadian Mathematical Bulletin, 2021, 64(01):182–191.
- [23] MARCAL P, SHEN Z M. Ricci-fat Finsler Metrics by Warped Product[J]. Proceedings of the American Mathematical Society, 2023, 151(05):2169–2183.
- [24] CHÁVEZ N. On Douglas Warped Product Metrics[J]. Results in Mathematics, 2022, 77(05):189.
- [25] BAO D, CHERN S S, SHEN Z M. An Introduction to Riemann–finsler Geometry[M]. New York:Springer Science, 2000.
- [26] GANGOPADHYAY R, SHRIWASTAWA A, TIWARI B. On Finsler Warped Product Metrics with Vanishing E-curvature[J]. AUT Journal of Mathematics and Computing, 2021, 2(02):137–142.
- [27] WU M K, ZHANG X L, SUN L E, et al. Some Curvature Properties of Finsler Warped Product Metrics[J]. Symmetry, 2023, 15(08):1565–1576.

Finsler Warped Product Metrics with Isotropic Berwald Curvature

HAN Jiang-hui, HE Yong*, ZHENG Feng-yu, LUO Li-xin

(College of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi, Xinjiang, 830017, China)

Abstract: In this paper, the Finsler Warped product metric proposed by Marcal and SHEN Zhong-min in 2020 is studied. Let dt^2 and α^2 be Euclidean metrics on Riemannian manifolds R and R^n respectively. The warped product Finsler metric is a Finsler metric $F = \alpha \sqrt{\phi(z, \rho)}$ endowed on the product manifold $R \times R^n$, where $z = \frac{dt}{\alpha}$, $\rho = |\bar{x}|$, ϕ is a suitable function on R^2 . It is proved that Finsler warped product metrics with isotropic Berwald curvature are Berwald metrics. The necessary conditions for the relatively isotropic Landsberg curvature of Finsler warped product metrics are given.

Keywords: Finsler metric; Warped product; Berwald metric; Isotropic Berwald curvature; Relatively isotropic Landsberg curvature