第44卷　第3期　　《新疆师范大学学报》(自然科学版)　　Vol.44,No.3
2025年9月　　Journal of Xinjiang Normal University　　Sept. 2025
(Natural Sciences Edition)

基于低秩Hankel矩阵分解的地震数据重建

秦　思[1],田　琳[1*],肖兴明[2]
(1.伊犁师范大学 电子工程学院,新疆 伊宁 835000;2.伊犁师范大学 网络安全与信息技术学院,新疆 伊宁 835000)

摘　要: 物理和经济条件的限制及噪声污染使得地震信号数据缺失,这将影响地震资料的处理和解释,因此进行地震数据重建十分重要。本研究低秩和Hankel矩阵对随机缺失地震数据进行重建:采用快速的低秩Hankel矩阵分解方法在时域直接进行2D重建,将核范数项替换分解成两个矩阵之和,避免SVD计算,加快了计算速度。在求解时,采用交替方向乘子法交替迭代处理,进一步加快计算速度。合成数据和实际地震数据测试均验证了该方法的有效性。该方法在重建精度和信噪比方面相对于f–k域滤波重建方法具有优越性。

关键词: 低秩;Hankel矩阵;地震数据重建;交替方向乘子法

中图分类号: P65　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1008-9659(2025)03-0017-06

地震数据能够提供地质构造模型所需的信息,在地质勘探中具有非常重要的作用。因不均匀采样或者物理限制而导致的数据缺失可能会影响地震数据的质量,给后续的地震数据处理和解释带来困难。有效的地震数据重建可以提高资料处理和解释的准确性,避免偏移分析等,从而提高地震数据的可靠性和应用价值。需要注意的是,重建的地震数据可能会出现一定程度的误差。所以,在进行地震数据重建时,应选择合适的插值方法,以减少重建误差。

针对恢复地震道数据中缺失的道方面,人们已开发多种相应技术。常见的技术包括基于稀疏变换的方法[1-4],基于预测滤波的方法[5-7],基于波动方程的方法[8-9],基于机器学习的方法[10-11],基于降秩的方法等[12-13]。不同的方法在不同的情况下表现不同,因此在实际应用中需要根据具体情况进行选择。无论选择哪种方法,恢复缺失的地震道数据都需要综合考虑数据的性质以及所需结果的准确性。

地震数据在特定的预变换后将达到较低的秩,而数据的缺失或噪声的存在将增加秩[14]。因此,人们一般通过降低数据的秩来重建地震数据,以消除缺失和噪声的影响。Trickett等人[15]扩展Cadzow滤波到地震数据插值,形成Hankel矩阵后再进行奇异值分解,该方法能够有效应用于三维地震数据。Oropeza等人[16]提出一种基于多通道奇异谱分析(Multichannel Singular Spectrum Analysis,MSSA)的降秩方法,允许同时去噪和重建地震数据。Niu等人提出一种联合稀疏和低秩先验模型的地震数据插值方法,其效果优于MSSA方法[13]。Xu等人引入全连接张量网络(Fully Connected Tensor Network,FCTN)分解的三维地震数据重建方法,然而此方法不适用于地质结构复杂的地区[17]。

为进一步提高地震数据重建的效率和精度,本研究采用低秩Hankel矩阵分解方法对地震数据进行插值重建。与传统的低秩Hankel矩阵地震数据重建不同的是,为避免奇异值分解的计算复杂度,减少计算时间,

[收稿日期]2024-07-11　　[修回日期]2024-10-25
[基金项目]新疆凝聚态相变与微结构实验室项目(XJDX912Z2413);伊犁师范大学基金资助项目(22XKZZ22);国家自然科学基金项目(61761043)。
[作者简介]秦　思(1999-),女,硕士研究生,主要从事地震信号重建方面研究,E-mail:2081574021@qq.com.
*[通讯作者]田　琳(1973-),女,副教授,主要从事地震勘探信号频谱分析、地震储层预测相关工作以及地震信号重建方法等方面研究,E-mail:1610356358@qq.com.

本研究不再使用定义为奇异值之和的核范数项。由于交替方向乘子法(Alternating Direction Method of Multipliers,ADMM)计算速度快,因此本研究使用该方法进行迭代求解。

1 低秩Hankel矩阵分解算法原理

完整的原始数据x可以通过低秩约束从不规则的下采样数据中进行重建。关于低秩约束的重建模型表示为[18]

$$\min_{x} \| \mathrm{H}x \|_{*} + \frac{\lambda}{2} \| \mathrm{y} - \mathrm{U}x \|_{2}^{2} \tag{1}$$

其中,y是观测数据,U是下采样算子。H是将其转换为Hankel矩阵的运算符,即$\mathrm{X} = \mathrm{H}x$.$\|\cdot\|_{*}$表示核范数(定义为奇异值之和),$\|\cdot\|_{2}^{2}$是l_2范数的平方,λ是正则化参数。式(1)前半部分是低秩约束,即用核范数最小近似低秩约束,后半部分是防止过拟合。

如果使用式(1)来解决重建问题,就会用到SVD分解,涉及大量计算。下面介绍一种加快计算、避免计算SVD的方法。

由于核范数$\|\cdot\|_{*}$求解问题可以转换为矩阵分解问题,对应以下关系[19-20]

$$\| \mathrm{V} \|_{*} = \min_{\mathrm{P},\mathrm{Q}} \frac{1}{2}\left(\| \mathrm{P} \|_{\mathrm{F}}^{2} + \| \mathrm{Q} \|_{\mathrm{F}}^{2} \right), \quad \text{s.t. } \mathrm{V} = \mathrm{P}\mathrm{Q}^{H} \tag{2}$$

其中,P和Q是通过V分解的两个矩阵,$\|\cdot\|_{\mathrm{F}}^{2}$表示Froberius范数的平方,上标$H$表示Hermitian转置。

接下来,将式(2)代入式(1)计算,可以得到

$$\min_{x} \left\{ \frac{1}{2}\left(\| \mathrm{P} \|_{\mathrm{F}}^{2} + \| \mathrm{Q} \|_{\mathrm{F}}^{2} \right) + \frac{\lambda}{2} \| \mathrm{y} - \mathrm{U}x \| \right\}, \quad \text{s.t. } \mathrm{H}x = \mathrm{P}\mathrm{Q}^{H} \tag{3}$$

然后,再用ADMM方法求解。式(3)的增广拉格朗日函数为

$$\mathrm{L}(x, \mathrm{P}, \mathrm{Q}, \mathrm{D}) = \frac{1}{2} \| \mathrm{P} \|_{\mathrm{F}}^{2} + \frac{1}{2} \| \mathrm{Q} \|_{\mathrm{F}}^{2} + \frac{\lambda}{2} \| \mathrm{y} - \mathrm{U}x \|_{2}^{2} + \beta \langle \mathrm{D}, \mathrm{H}x - \mathrm{P}\mathrm{Q}^{H} \rangle + \frac{\beta}{2} \| \mathrm{H}x - \mathrm{P}\mathrm{Q}^{H} \|_{\mathrm{F}}^{2} \tag{4}$$

其中,D表示拉格朗日乘子,$\langle \cdot, \cdot \rangle$表示内积,$\beta$表示惩罚参数。

式(4)可转化为以下问题

$$\begin{cases} x_{k+1} = \arg\min\limits_{x} \frac{\lambda}{2} \| \mathrm{y} - \mathrm{U}x \|_{2}^{2} + \beta \langle \mathrm{D}, \mathrm{H}x - \mathrm{P}\mathrm{Q}^{H} \rangle + \frac{\beta}{2} \| \mathrm{H}x - \mathrm{P}\mathrm{Q}^{H} \|_{\mathrm{F}}^{2} \\ \mathrm{P}_{k+1} = \arg\min\limits_{\mathrm{P}} \frac{1}{2} \| \mathrm{P} \|_{\mathrm{F}}^{2} + \beta \langle \mathrm{D}, \mathrm{H}x - \mathrm{P}\mathrm{Q}^{H} \rangle + \frac{\beta}{2} \| \mathrm{H}x - \mathrm{P}\mathrm{Q}^{H} \|_{\mathrm{F}}^{2} \\ \mathrm{Q}_{k+1} = \arg\min\limits_{\mathrm{Q}} \frac{1}{2} \| \mathrm{Q} \|_{\mathrm{F}}^{2} + \beta \langle \mathrm{D}, \mathrm{H}x - \mathrm{P}\mathrm{Q}^{H} \rangle + \frac{\beta}{2} \| \mathrm{H}x - \mathrm{P}\mathrm{Q}^{H} \|_{\mathrm{F}}^{2} \\ \mathrm{D}_{k+1} = \mathrm{D}_{k} + \tau (\mathrm{H}x_{k+1} - \mathrm{P}_{k+1}\mathrm{Q}_{k+1}^{H}) \end{cases} \tag{5}$$

其中,τ表示步长,k是迭代次数。

固定P_k,Q_k和D_k,x_{k+1}的解为

$$x_{k+1} = (\lambda \mathrm{U}^{H}\mathrm{U} + \beta \mathrm{H}^{H}\mathrm{H})^{-1} [\lambda \mathrm{U}^{H}\mathrm{y} + \beta \mathrm{H}^{H} (\mathrm{P}_{k}\mathrm{Q}_{k}{}^{H} - \mathrm{D}_{k})] \tag{6}$$

固定x_{k+1},Q_k和D_k,P_{k+1}的解为

$$\mathrm{P}_{k+1} = (\beta \mathrm{Q}_{k}{}^{H}\mathrm{Q}_{k} + I)^{-1} \mathrm{Q}_{k} [\beta (\mathrm{H}x_{k+1} + \mathrm{D}_{k})] \tag{7}$$

固定x_{k+1},P_{k+1}和D_k,Q_{k+1}的解为

$$\mathrm{Q}_{k+1} = (\beta \mathrm{P}_{k+1}{}^{H}\mathrm{P}_{k+1} + I)^{-1} \mathrm{P}_{k+1} [\beta (\mathrm{H}x_{k+1} + \mathrm{D}_{k})]^{H} \tag{8}$$

固定x_{k+1},P_{k+1}和Q_{k+1},D_{k+1}的解为

$$\mathrm{D}_{k+1} = \mathrm{D}_{k} + \tau (\mathrm{H}x_{k+1} - \mathrm{P}_{k+1}\mathrm{Q}_{k+1}^{H}) \tag{9}$$

具体算法如下

算法1:低秩Hankel分解重建方法用于地震数据插值。

初始化:输入y,H,设置β,λ,收敛条件η. 初始化解$x_0 = \mathrm{U}^T\mathrm{y}$.

当达到收敛条件或者最大迭代次数时跳出循环

$$x_{k+1} = (\lambda \mathrm{U}^H\mathrm{U} + \beta \mathrm{H}^H\mathrm{H})^{-1}[\lambda \mathrm{U}^H\mathrm{y} + \beta \mathrm{H}^H(\mathrm{P}_k{\mathrm{Q}_k}^H - \mathrm{D}_k)]$$

$$\mathrm{P}_{k+1} = (\beta {\mathrm{Q}_k}^H\mathrm{Q}_k + I)^{-1}\mathrm{Q}_k[\beta(\mathrm{H}x_{k+1} + \mathrm{D}_k)]$$

$$\mathrm{Q}_{k+1} = (\beta {\mathrm{P}_{k+1}}^H\mathrm{P}_{k+1} + I)^{-1}\mathrm{P}_{k+1}[\beta(\mathrm{H}x_{k+1} + \mathrm{D}_k)]^H$$

$$\mathrm{D}_{k+1} = \mathrm{D}_k + \tau(\mathrm{H}x_{k+1} - \mathrm{P}_{k+1}\mathrm{Q}_{k+1}^H)$$

$$\eta_k = \frac{\| x_{k+1} - x_k \|}{\| x_k \|}, \qquad k \leftarrow k + 1$$

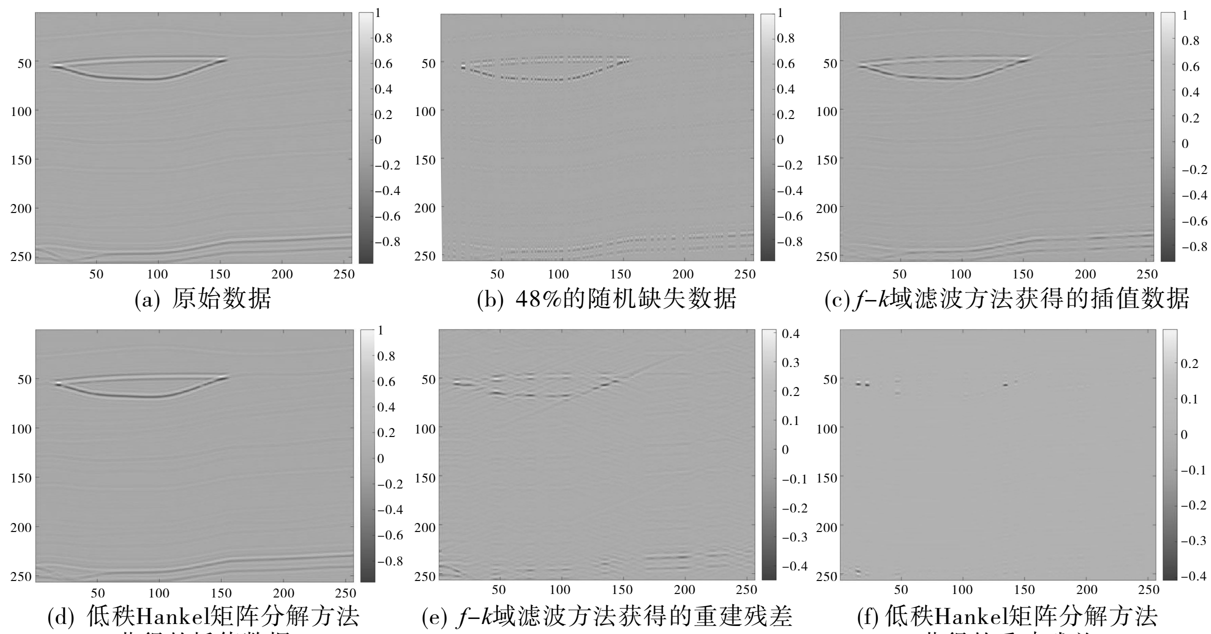
输出:$x \leftarrow x_{k+1}$.

2　数值实验

本节阐释了利用数值实验来验证低秩Hankel矩阵分解重建方法的可行性。作为对比,f–k域滤波的重建方法被用来衡量。在带有Inter Core i9–12900H处理器、运行Windows 11操作系统的联想电脑上进行所有数据处理。

2.1　合成地震数据

2D合成地震数据仿真采用Marmousi2模型[21]的部分数据进行实验,重建结果如图1所示。图1(a)和图1(b)分别是未经处理的干净原始数据和随机缺失48%的下采样数据。图1(c)和图1(d)分别是f–k域滤波和低秩Hankel矩阵分解的重建结果。图1(e)和图1(f)分别是f–k域滤波和低秩Hankel矩阵分解的重建残差。通过对比两种方法的残差图,可以明确低秩Hankel矩阵分解重建方法的残差更小,重建精度高。



(a) 原始数据　(b) 48%的随机缺失数据　(c) f–k域滤波方法获得的插值数据

(d) 低秩Hankel矩阵分解方法获得的插值数据　(e) f–k域滤波方法获得的重建残差　(f) 低秩Hankel矩阵分解方法获得的重建残差

图1　合成数据重建结果

为了进一步验证两种方法的优劣,本研究选取其重建的单道轨迹进行比较。图2是选自图1(a)、图1(c)、图1(d)的第100道轨迹。其中,实线表示原始数据,点线表示f–k域滤波的重建数据,虚线表示低秩Hankel矩阵分解重建的数据。由图2可知,f–k域滤波方法在轨迹前期和后期反复出现了较大波动,而本研究提出的低秩方法获得了更接近原始数据的结果。

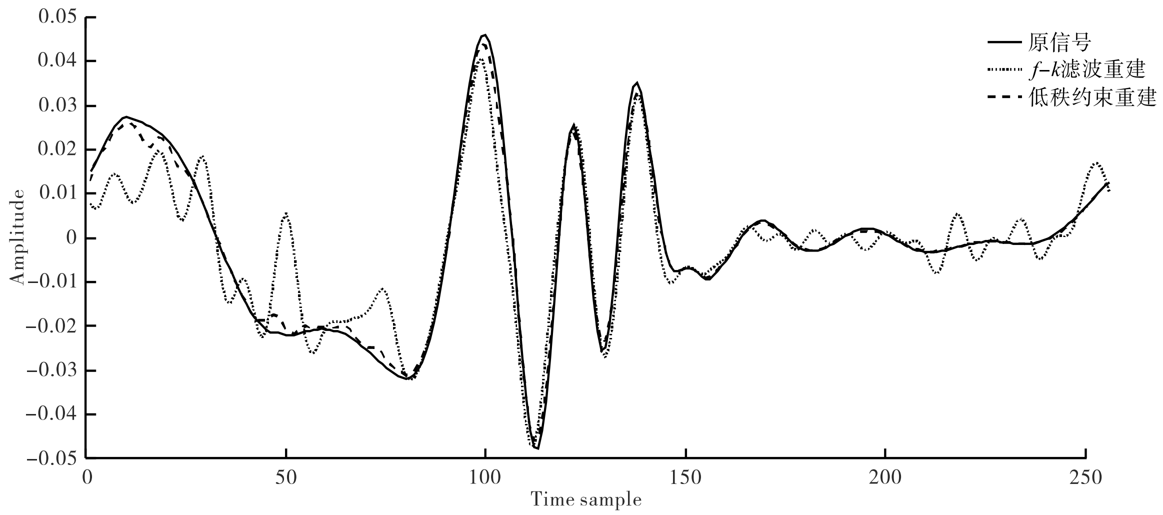


图2 合成模型的重建结果单道对比

本研究通过重建误差和信噪比的数据结果来进一步评估低秩Hankel矩阵分解方法的重建性。重建误差的减少会使重建结果更接近原始数据,而更高的信噪比则会带来更优质的重建质量。2D合成数据中数值测试的结果如表1所示。通过重建误差和信噪比的比较可知,相较于*f–k*域滤波方法,低秩Hankel矩阵分解方法具有更低的重建误差和更高的信噪比,即重建性能更好。

表1 不同方法的重建误差和信噪比

算法	重建误差	信噪比
*f–k*域滤波重建	870.41	5.92
低秩Hankel矩阵分解	98.82	16.27

2.2 实际地震数据

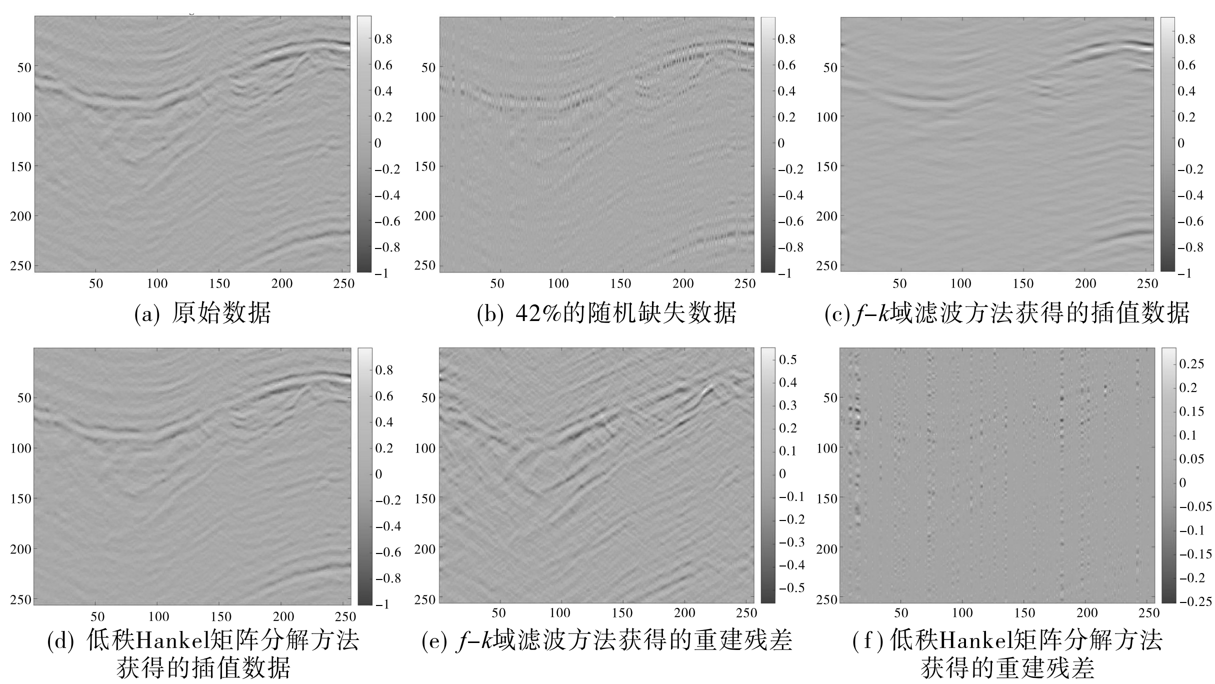


图3 实际地震数据重建结果

为了验证两种方法在实际应用中的效果,将其应用于2D实际地震数据。实际地震资料来源于川东北地区A测线的部分CDP叠加剖面,如图3(a)所示;图3(b)为下采样数据,其不规则缺失率达42%;图3(c)和

图3(d)分别代表用*f-k*域滤波和低秩Hankel矩阵分解方法处理的结果。图3(e)和图3(f)分别是两种方法的重建残差。重建残差图显示，*f-k*域滤波方法存在较大的残差，而低秩Hankel矩阵分解方法有较小的残差。由此可见，低秩Hankel矩阵分解方法取得了令人满意的结果。

图4是实际地震数据的单道轨迹重建对比图。实线代表原始数据，点线、虚线分别代表*f-k*域滤波方法和低秩Hankel矩阵分解方法的重建结果。其中，*f-k*域滤波方法在原始轨迹的中间位置振荡，效果不及低秩Hankel矩阵分解方法。

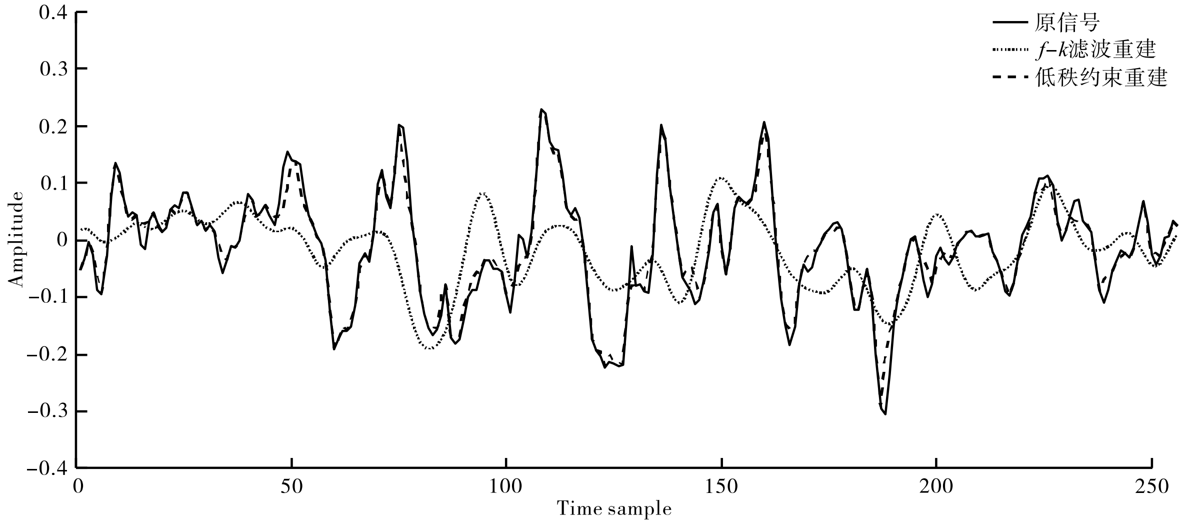


图4　实际地震数据的重建结果单道对比

实际地震数据用不同方法重建的误差和信噪比数值结果如表2所示。相较于*f-k*域滤波方法，Hankel矩阵分解方法的重建误差更低，信噪比更高。所以，Hankel矩阵分解方法重建精度更高。

表2　不同方法的重建误差和信噪比

算法	重建误差	信噪比
*f-k*域滤波重建	3771.29	5.91
低秩Hankel矩阵分解	609.97	15.26

3　结论

文章提出了一种低秩Hankel矩阵分解的模型，用于二维地震数据重建。受矩阵分解的启发，将核范数项替换分解，在迭代求解时不再需要计算该项，减少了计算时间。数值实验表明，基于低秩Hankel矩阵分解的重建方法是一种有效的地震数据重建方法，可以在减少存储和计算成本的同时保留原始数据的主要信息。与*f-k*域滤波重建方法相比，本研究所提方法有助于进一步提高重建精度和信噪比。

参考文献：

[1] HUANG W L, WU R S, WANG R Q. Damped Dreamlet Representation for Exploration Seismic Data Interpolation and Denoising[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2018, 56(06): 3159-3172.

[2] WANG B F, ZHANG Y Q, LU W K, et al. A Robust and Efficient Sparse Time-invariant Radon Transform in the Mixed Time-frequency Domain[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2019, 57(10): 7558-7566.

[3] ZHANG H, DIAO S, YANG H Y, et al. Reconstruction of 3D Non-uniformly Sampled Seismic Data along Two Spatial Coordinates Using Non-equispaced Curvelet Transform[J]. Exploration Geophysics, 2018, 49(06): 906-921.

[4] LIU N H, WU L K, WANG J L, et al. Seismic Data Reconstruction via Wavelet-based Residual Deep Learning[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2022, 60: 1-13.

[5] PORSANI M J. Seismic Trace Interpolation Using Half-step Prediction Filters[J]. Geophysics, 1999, 64(05): 1461-1467.

[6] WANG Y H. Seismic Trace Interpolation in the f-x-y Domain[J]. Geophysics, 2002, 67(04): 1232-1239.

[7] ZHENG Z S, LIU Y, LIU C. Seismic Data Interpolation Using Streaming Prediction Filter in the Frequency Domain[J]. Geophysical Journal International, 2022, 229(01): 370-389.

[8] RONEN J. Wave-equation Trace Interpolation[J]. Geophysics, 1987, 52(07): 973-984.

[9] RIZZUTI G, LOUBOUTIN M, WANG R R, et al. A Dual Formulation of Wavefield Reconstruction Inversion for Large-scale Seismic Inversion[J]. Geophysics, 2021, 86(06): R879-R893.

[10] WANG F, CHEN S C. Residual Learning of Deep Convolutional Neural Network for Seismic Random Noise Attenuation[J]. IEEE Geoscience and Remote Sensing Letters, 2019, 16(08): 1314-1318.

[11] FANG W Q, FU L H, ZHANG M, et al. Seismic Data Interpolation based on U-net with Texture Loss[J]. Geophysics, 2021, 86(01): V41-V54.

[12] REKAPALLI R, TIWARI R K, SEN M K, et al. 3D Seismic Data De-noising and Reconstruction Using Multichannel Time Slice Singular Spectrum Analysis[J]. Journal of Applied Geophysics, 2017, 140: 145-153.

[13] NIU X, FU L H, ZHANG W J, et al. Seismic Data Interpolation based on Simultaneously Sparse and Low-rank Matrix Recovery[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2022, 60: 1-13.

[14] FANG W Q, FU L H, LI H W, et al. BSnet: An Unsupervised Blind Spot Network for Seismic Data Random Noise Attenuation[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2022, 60: 1-13.

[15] TRICKETT S, BURROUGHS L, MILTON A, et al. Rank-reduction-based Trace Interpolation[J]. SEG Technical Program Expanded Abstracts, 2010: 3829-3833.

[16] OROPEZA V, SACCHI M. Simultaneous Seismic Data Denoising and Reconstruction Via Multichannel Singular Spectrum Analysis[J]. Geophysics, 2011, 76(03): V25-V32.

[17] XU Y J, FU L H, NIU X, et al. Three-dimensional Seismic Data Reconstruction based on Fully Connected Tensor Network Decomposition[J]. IEEE Transactions on Geoscience and Remote Sensing, 2023, 61: 1-11.

[18] GUO D, LU H F, QU X B. A Fast Low Rank Hankel Matrix Factorization Reconstruction Method for Non-uniformly Sampled Magnetic Resonance Spectroscopy[J]. IEEE Access, 2017, 5: 16033-16039.

[19] SREBRO N. Learning with Matrix Factorizations[J]. Massachusetts Institute of Technology, 2004: 1-132.

[20] SIGNORETTO M, CEVHER V, SUYKENS J A K. An SVD-free Approach to a Class of Structured Low Rank Matrix[J]. Organometallics, 2013, 12: 4283-4285.

[21] MARTIN G S, WILEY R, MARFURT K J.Marmousi2[J]. Leading Edge, 2006, 25(02): 156-166.

Reconstruction of Seismic Data based on Low-rank Hankel Matrix Decomposition

QIN Si[1], TIAN Lin[1]*, XIAO Xing-ming[2]

(*1.School of Electronic Engineering, Yili Normal University, Yining, Xinjiang, 835000, China; 2.School of Network Security and Information Technology, Yili Normal University, Yining, Xinjiang, 835000, China*)

Abstract: Reconstruction of seismic data is necessary due to physical and economic constraints and noise contamination, which makes seismic signal data missing, which will affect the subsequent processing and interpretation of seismic data. The low-rank and Hankel matrices are combined to reconstruct the random missing seismic data: a fast low-rank Hankel matrix decomposition method is used to perform the 2D reconstruction directly in the time domain, which decomposes the nuclear norm term substitution into the sum of the two matrices, avoiding the SVD computation, and accelerating the computation speed. In the solution, the alternating direction multiplier method is used for alternating iterative processing to further speed up the computation. Both synthetic data and actual seismic data tests verify the effectiveness of the method. Moreover, the method is superior to the f-k domain filtered reconstruction method in terms of reconstruction accuracy and signal-to-noise ratio.

Keywords: Low-rank; Hankel matrix; Seismic data reconstruction; Alternating direction multiplier method