

加权概率区间值直觉犹豫模糊集多属性群决策方法及应用

朱国成^{1,2}, 何惠娟¹, 陈翠盈¹

(1. 广东创新科技职业学院 通识教育学院, 广东 东莞 523960; 2. 暨南大学 国际商学院, 广东 珠海 519070)

摘要:为了在概率区间值直觉犹豫模糊集(PIVIHFS)中储存更多决策信息,更科学地处理决策问题,本研究对PIVIHFS中的每个概率区间值直觉犹豫模糊数赋予决策专家权重,定义加权概率区间值直觉犹豫模糊集(WPIVIHFS)。建立加权概率区间值直觉犹豫模糊元(WPIVIHFE)的加权得分函数模型、加权精确函数模型以及2个WPIVIHFE的大小比较规则。建立加权概率区间值直觉犹豫模糊有序加权平均(WPIVIHFWA)算子、加权概率区间值直觉犹豫模糊有序加权几何(WPIVIHFOWG)算子以及加权概率区间值直觉犹豫模糊加权Maclaruin对称平均(WPIVIHFWMSM)算子模型,同时研究WPIVIHFWMSM算子的表达式及其具有的性质。基于以上三种算子构建一套决策方法,并通过数值算例验证了WPIVIHFS理论的合理性与决策方法的可行性。

关键词:加权概率区间值直觉犹豫模糊集; WPIVIHFWMSM算子; 加权得分函数; 加权精确函数

中图分类号: O159 **文献标识码:** A **文章编号:** 1008-9659(2025)03-0001-10

在不确定数据信息条件下的多属性群决策问题中,犹豫模糊集(HFS)^[1]能够保留决策群体对事物的全部认知信息,非常有利于解决复杂多属性群决策问题。众多学者深入研究了HFS相关理论及应用问题。朱国成等人^[2]在新定义的犹豫模糊元混合和以及混合积分得分函数的基础上,建立犹豫模糊加权混合加与混合积两个集结算子,提出一种新的HFS多属性群决策方法;于淼等人^[3]提出现有HFS距离模型的不足之处,介绍了HFS距离矩阵概念及其测度距离的优越性,最后给出了一种识别决策新方法;张志伟等人^[4]根据决策者的不同偏好,提出基于HFS的TOPSIS多属性决策方法;曹磊等人^[5]设置了一种基于线性插值悲观升维加权犹豫模糊兰氏距离测度和犹豫模糊指数熵的多属性群决策算法,并用该算法解决水质综合评价问题;张家贤等人^[6]为处理航空装备保障系统效能评估问题,建立一种基于犹豫模糊混合云模型的效能评估模型。文献[7-10]分别从不同角度出发研究了HFS多属性群决策问题。

为了在评价数据信息由HFS刻画的决策环境中,更加全面与精细化地输出决策信息,有学者基于不同视角对隶属度进行了注解。Zhu等人^[11]针对测评数据信息中隶属度出现的可能性问题,定义了概率犹豫模糊集(PHFS);曾文艺等人^[12]根据每个不同隶属度出现的权威性问题,提出了加权犹豫模糊集(WHFS)的概念。在PHFS理论与决策应用研究方面,朱国成等人^[13]采用区间值隶属度的中位数、清晰度以及概率构成的三维点坐标来刻画概率区间值犹豫模糊数,并在此基础上建立一种TOPSIS多属性群决策方法;张艳娜等人^[14]针对评价指标权重完全未知的决策问题给出了一种基于几何平均犹豫度的概率犹豫模糊多属性决策方法;朱国成等人^[15]采用平面向量来描述概率犹豫模糊数,在此基础上建立了平面向量得分函数模型、平面向量离差函数模型、两个概率犹豫模糊元的大小比较规则与距离测度模型;王莉莉等人^[16]将后悔理论与PHFS进行结合,提出了一种多属性群决策方法;文献[17-20]在不同的决策场景中对PHFS进行了深入研究。在WHFS理论与决策应用研究方面,朱国成等人^[21]在设置绝对权威专家的条件下计算非权威决策专家

[收稿日期] 2024-08-27

[修回日期] 2024-09-20

[基金项目] 广东省普通高校特色创新类项目(2024KTSCX403; 2023KTSCX414); 广东创新科技职业学院特色创新类重点项目(2023TSZD05; 2025TSZD02); 广东创新科技职业学院教育教学改革研究与实践重点项目(JGZD202302)。

[作者简介] 朱国成(1986-),男,副教授,主要从事模糊信息决策与最优化方面研究, E-mail: zhuguochengky@yeah.net.

的综合权重,然后将所有决策专家的综合权重注入 HFS 中,以此获取 WHFS,最后建立用参数调整方案得分实值与得分虚值比例进而计算方案综合决策值的模型;朱国成^[22]从单个属性角度建立了对备选方案排序的两种算法,并对两种算法结果进行了对比分析;高培根等人^[23]利用 WHFS 作为实验信息数据,在此基础上将分阶段搜索粒子群算法与 Kriging 方法结合,建立决策模型;冯雪等人^[24]给出了一种加权犹豫模糊偏好关系和乘性一致偏好关系,为了检测加权犹豫模糊偏好关系的一致性水平,设计了一种一致性调整算法;贾新玲等人^[25]提出一种基于 WHFS 的 Lance 距离多属性群决策方法,用于选择流感疫苗供货商。WHFS 与 PHFS 作为 HFS 的拓展定义,基于不同视角丰富和完善了 HFS 的理论内涵,解决了大量在犹豫模糊环境中多属性群决策问题。考虑到 WHFS 与 PHFS 分别较为片面地描述隶属度发生的重要性与可能性问题,因而 WHFS 与 PHFS 在刻画决策信息时仍然具有一定的局限性。为此,朱国成等人^[26]将决策专家的权重注入 PHFS 中,进而定义了加权概率犹豫模糊集(WPHFS)。WPHFS 成功糅合了 WHFS 与 PHFS 分别具有的特点,在新的视角下提供了一种更加灵活的表征决策信息方法^[27-29]。

目前,在 WPHFS 多属性群决策问题中,当计算方案综合评价值时,皆默认评价属性的数据信息糅合参数在集结算子中相互独立,但决策群体在面对大型多属性群决策问题时,可能会出现由决策者主观思考与表达的模糊性导致输入参数差异性的情形,最终得到有悖于现实期待的决策结果。因此,有必要研究多个输入参数之间的相互关系问题。Maclaurin 对称平均(MSM)算子^[27]是研究多个参数输入关系的常用工具,其在群决策问题中处理各评价指标之间的相互关系方面是非常有效的^[28]。由于 WPHFS 概念提出不久,因而对其理论与决策应用研究还不充分。例如,在 WPHFS 中,全体隶属度若由区间值直觉犹豫模糊数构成,则此时的 WPHFS 演变为加权概率区间值直觉犹豫模糊集(WPIVIHFS)。针对 WPIVIHFS 的理论研究,不可避免地会牵扯到区间直觉犹豫模糊集的理论知识,因此,完善 WPIVIHFS 自身理论知识是其在多属性群决策问题中应用的前提。

在 WPIVIHFS 多属性群决策问题中,文章将 WPIVIHFS 与 MSM 算子进行结合,并基于 MSM 算子进而演绎新算子来解决 WPIVIHFS 多属性群决策问题。具体做法步骤如下:首先,建立加权概率区间值直觉犹豫模糊有序加权平均(WPIVIHFOWA)算子模型、加权概率区间值直觉犹豫模糊有序加权几何(WPIVIHFOWG)算子模型;其次,在引入 Archimedean 范数的基础上,建立加权概率区间值直觉犹豫模糊加权 MSM(WPIVIHFWMSM)算子模型,并进一步研究 WPIVIHFWMSM 算子的相关问题以及特殊情形;最后,在具体数值算例中验证 WPIVIHFS 理论与决策方法的可行性。

1 预备知识

1.1 WPIVIHFS 基础知识

定义 1^[29] 设 X 为论域, X 上的 PIVIHFSH 定义为 $H = \{(x, ([u^-, u^+], [v^-, v^+]), P) | x \in X\}$ 。PIVIHFSH 是由一系列概率区间值直觉犹豫模糊元(PIVIHFE) $h = \{([u^-, u^+], [v^-, v^+]), P\}$ 组成。 P 为区间直觉模糊数 $\{[u^-, u^+], [v^-, v^+]\}$ 发生的概率, $P \in [0, 1]$, $u^-, u^+, v^-, v^+ \in [0, 1]$, $u^+ + v^+ \leq 1$ 。

定义 2^[30] 设 X 为一个有限集,形如 $H = \{< x, h_x(p_x) > | x \in X\}$ 的二元组称为集合 X 上的 PIVIHFS, 其中将 $h_x(p_x) = h_i = \{([u_i^{(k)-}, u_i^{(k)+}], [v_i^{(k)-}, v_i^{(k)+}]), p_i^{(k)} | i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, \#h_i, \sum_{k=1}^{\#h_i} p_i^{(k)} \leq 1\}$ 称为一系列 PIVIHFEs。式中符号 $u_i^{(k)-}, u_i^{(k)+}, v_i^{(k)-}, v_i^{(k)+} \in [0, 1]$, $u_i^{(k)+} + v_i^{(k)+} \leq 1$, $p_i^{(k)} \in [0, 1]$, $0 \leq \sum_{k=1}^{\#h_i} p_i^{(k)} \leq 1$, n 指 h_i 的个数, $\#h_i$ 指 h_i 中的元素个数。PIVIHFE h_i 的得分函数 $S(h_i)$ 记为

$$S(h_i) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\#h_i} p_i^{(k)} (u_i^{(k)-} + u_i^{(k)+} - v_i^{(k)+} - v_i^{(k)-}) \quad (1)$$

精确函数 $E(h_i)$ 记为

$$E(h_i) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\#h_i} p_i^{(k)} (u_i^{(k)-} + u_i^{(k)+} + v_i^{(k)+} + v_i^{(k)-}) \quad (2)$$

对于任意 2 个 PIVIHFEs h_1 和 h_2 有以下比较规则: (1) 如果 $S(h_1) < S(h_2)$, 则 $h_1 < h_2$. (2) 如果 $S(h_1) = S(h_2)$, ①若 $E(h_1) < E(h_2)$, 则 $h_1 < h_2$; ②若 $E(h_1) = E(h_2)$, 则 $h_1 = h_2$.

文章给 PIVIHFS 中的每个概率区间值直觉犹豫模糊数(PIVIHFN)赋予决策专家权重,进而定义

WPVIHFS,此时有如下定义:

定义3 设 X 是一个非空且有限集合,称 $H = \{(x, ([u^-, u^+], [v^-, v^+]), P, \omega) | x \in X\}$ 为 X 上的一个WPVIHFS. P, ω 分别为区间直觉模糊数 $\{[u^-, u^+], [v^-, v^+]\}$ 发生的概率与决策专家权重, $p \in [0, 1], \omega \in [0, 1], u^-, u^+, v^-, v^+ \in [0, 1], u^+ + v^+ \leq 1$.

定义4 对于任意一列WPVIHFEs $\tilde{h}_i = \{([u_i^{(k)-}, u_i^{(k)+}], [v_i^{(k)-}, v_i^{(k)+}], p_i^{(k)}, \omega_i^{(k)})\}$, $\tilde{h}_i$ 的加权得分函数记为

$$\tilde{S}(\tilde{h}_i) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\# \tilde{h}_i} p_i^{(k)} \omega_i^{(k)} (u_i^{(k)-} + u_i^{(k)+} - v_i^{(k)-} - v_i^{(k)+}) \quad (3)$$

加权精确函数记为

$$\tilde{E}(\tilde{h}_i) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\# \tilde{h}_i} p_i^{(k)} \omega_i^{(k)} (u_i^{(k)-} + u_i^{(k)+} + v_i^{(k)-} + v_i^{(k)+}) \quad (4)$$

其中, $p_i^{(k)}$ 为区间直觉模糊数 $\{[u_i^{(k)-}, u_i^{(k)+}], [v_i^{(k)-}, v_i^{(k)+}]\}$ 发生的概率, $u_i^{(k)-}, u_i^{(k)+}, v_i^{(k)-}, v_i^{(k)+} \in [0, 1], u_i^{(k)+} + v_i^{(k)+} \leq 1, p_i^{(k)} \in [0, 1], 0 \leq \sum_{k=1}^{\# \tilde{h}_i} p_i^{(k)} \leq 1, \omega_i^{(k)} \in [0, 1], 0 \leq \sum_{k=1}^{\# \tilde{h}_i} \omega_i^{(k)} \leq 1$. 对于任意2个WPVIHFEs $\tilde{h}_1$ 和 $\tilde{h}_2$,有以下比较规则: (1) 如果 $\tilde{S}(\tilde{h}_1) < \tilde{S}(\tilde{h}_2)$, 则 $\tilde{h}_1 < \tilde{h}_2$. (2) 如果 $\tilde{S}(\tilde{h}_1) = \tilde{S}(\tilde{h}_2)$, ① 若 $\tilde{E}(\tilde{h}_1) < \tilde{E}(\tilde{h}_2)$, 则 $\tilde{h}_1 < \tilde{h}_2$; ② 若 $\tilde{E}(\tilde{h}_1) = \tilde{E}(\tilde{h}_2)$, 则 $\tilde{h}_1 = \tilde{h}_2$.

以下面数值为例说明给予PIVIHFS中的PIVIHFN添加决策专家权重的必要性.

例1 比较2个PIVIHFEs $h_1 = \{([0.1, 0.3], [0.1, 0.2]), 0.4\}, ([0.3, 0.4], [0.1, 0.3]), 0.6\}$, $h_2 = \{([0.1, 0.4], [0.1, 0.2]), 0.5\}, ([0.2, 0.3], [0.1, 0.3]), 0.5\}$ 的大小.

解: ① 按照定义2的比较规则,可分别得 $S(h_1) = 0.11, S(h_2) = 0.075$, 即知 $h_1 > h_2$.

② 若给予 h_1, h_2 中分别添加决策专家平均权重,此时有

$$\tilde{h}_1 = \{([0.1, 0.3], [0.1, 0.2]), 0.4, 0.5\}, ([0.3, 0.4], [0.1, 0.3]), 0.6, 0.5\}$$

$$\tilde{h}_2 = \{([0.1, 0.4], [0.1, 0.2]), 0.5, 0.5\}, ([0.2, 0.3], [0.1, 0.3]), 0.5, 0.5\}$$

按照定义4的比较规则,可分别得 $\tilde{S}(\tilde{h}_1) = 0.055, \tilde{S}(\tilde{h}_2) = 0.0375$, 即 $\tilde{h}_1 > \tilde{h}_2$.

③ 若给予 h_1, h_2 中不分别添加决策专家平均权重,此时不妨按照如下方法添加

$$\tilde{h}_1 = \{([0.1, 0.3], [0.1, 0.2]), 0.4, 0.7\}, ([0.3, 0.4], [0.1, 0.3]), 0.6, 0.3\}$$

$$\tilde{h}_2 = \{([0.1, 0.4], [0.1, 0.2]), 0.5, 0.7\}, ([0.2, 0.3], [0.1, 0.3]), 0.5, 0.3\}$$

按照定义4的比较规则,可分别得 $\tilde{S}(\tilde{h}_1) = 0.041, \tilde{S}(\tilde{h}_2) = 0.0425$, 即知 $\tilde{h}_1 < \tilde{h}_2$.

由①②可知,若对于决策专家没有偏好,即使将决策专家的平均权重注入PIVIHFS中,也不会改变 h_1 与 h_2 的排序,进一步说明了定义4排序规则的有效性.由③可知,将决策专家的非平均权重赋予每个PIVIHFN后,得到了 $\tilde{h}_1$ 与 $\tilde{h}_2$ 相反的排序结果.这说明若决策专家有偏好,决策专家权重在 h_1 与 h_2 排序过程中起到决定性作用.考虑在实际决策问题中,针对决策专家的偏好问题时常发生,因而文章对于每个PIVIHFN赋予决策专家权重是必要的.

1.2 Archimedean 范数与两种算子

目前,大多数研究文献在利用集结算子获取每个方案的综合决策数据信息时,都基于集结算子标准的四则运算进行.文章集结算子的运算采用Archimedean范数(AN)的形式进行.

针对AN的表示形式问题,可以利用严格的单调递减加性算子 $g: [0, 1] \rightarrow [0, +\infty]$ 表示的 $T(x, y) = g^{-1}(g(x) + g(y))$ 来描述标准的Archimedean T -范数,其中 $g(1) = 0$. 同时,也可以依据对偶原则,采用 $S(x, y) = f^{-1}(f(x) + f(y))$ 来刻画标准的Archimedean S -范数, $f(t) = g(1 - t)$, $f(t)$ 为严格的单调递增函数并且有 $f(0) = 0$.

定义5 对于3个WPVIHFEs $\tilde{h}, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h} = \{([u^{(k)-}, u^{(k)+}], [v^{(k)-}, v^{(k)+}], P_k, \omega_k)\}$, $\tilde{h}_i = \{([u_i^{(k)-}, u_i^{(k)+}], [v_i^{(k)-}, v_i^{(k)+}], P_{ik}, \omega_{ik})\}$, 这里 $i = 1, 2, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}$, 规定 $\# \tilde{h} = \# \tilde{h}_1 = \# \tilde{h}_2$. 定义运算如下

$$\textcircled{1} \tilde{h}^c = \{([1 - u^{(k)+}, 1 - u^{(k)-}], [1 - v^{(k)+}, 1 - v^{(k)-}], P_k, \omega_k) | k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}\};$$

$$\textcircled{2} \tilde{h}_1 \oplus \tilde{h}_2 = \{([f^{-1}(f(u_1^{(k)-}) + f(u_2^{(k)-})), f^{-1}(f(u_1^{(k)+}) + f(u_2^{(k)+}))], [g^{-1}(g(v_1^{(k)-}) + g(v_2^{(k)-})), g^{-1}(g(v_1^{(k)+}) + g(v_2^{(k)+}))],$$

$$\overline{p_{1k} + p_{2k}}, \overline{\omega_{1k} + \omega_{2k}}) | \overline{p_{1k} + p_{2k}} = \frac{p_{1k} p_{2k}}{\sum_{k'=1}^{\# \tilde{h}} p_{1k'} p_{2k'}}, \overline{\omega_{1k} + \omega_{2k}} = \frac{\omega_{1k} + \omega_{2k}}{\sum_{k'=1}^{\# \tilde{h}} (\omega_{1k'} + \omega_{2k'})}, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}\};$$

$$\textcircled{3} \tilde{h}_1 \otimes \tilde{h}_2 = \{(([\ g^{-1}(g(u_1^{(k)-}) + g(u_2^{(k)-})), g^{-1}(g(u_1^{(k)+}) + g(u_2^{(k)+}))], [f^{-1}(f(v_1^{(k)-}) + f(v_2^{(k)-})), f^{-1}(f(v_1^{(k)+}) + f(v_2^{(k)+}))]), \overline{p_{1k} + p_{2k}}, \overline{\omega_{1k} + \omega_{2k}}) | \overline{p_{1k} + p_{2k}} = \frac{p_{1k} p_{2k}}{\sum_{k'=1}^{\# \tilde{h}} p_{1k'} p_{2k'}}, \overline{\omega_{1k} + \omega_{2k}} = \frac{\omega_{1k} + \omega_{2k}}{\sum_{k'=1}^{\# \tilde{h}} (\omega_{1k'} + \omega_{2k'})}, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}\};$$

$$\textcircled{4} \lambda \tilde{h} = \{(([\ f^{-1}(\lambda f(u^{(k)-})), f^{-1}(\lambda f(u^{(k)+}))], [g^{-1}(\lambda g(v^{(k)-})), g^{-1}(\lambda g(v^{(k)+}))]), P_k, \omega_k) | k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}\};$$

$$\textcircled{5} \tilde{h}^\lambda = \{(([\ g^{-1}(\lambda g(u^{(k)-})), g^{-1}(\lambda g(u^{(k)+}))], [f^{-1}(\lambda f(v^{(k)-})), f^{-1}(\lambda f(v^{(k)+}))]), P_k, \omega_k) | k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}\}.$$

定理 1 对于 3 个 WPIVIHFES $\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \tilde{h} = \{(([\ u^{(k)-}, u^{(k)+}], [v^{(k)-}, v^{(k)+}]), P_k, \omega_k) | k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}\}$, $\tilde{h}_i = \{(([\ u_i^{(k)-}, u_i^{(k)+}], [v_i^{(k)-}, v_i^{(k)+}]), P_{ik}, \omega_{ik})\}$, 这里 $i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}$, 规定 $\# \tilde{h} = \# \tilde{h}_1 = \# \tilde{h}_2$, 则以下运算成立

$$\textcircled{1} \tilde{h}_1 \oplus \tilde{h}_2 = \tilde{h}_2 \oplus \tilde{h}_1;$$

$$\textcircled{2} \tilde{h}_1 \otimes \tilde{h}_2 = \tilde{h}_2 \otimes \tilde{h}_1;$$

$$\textcircled{3} \lambda(\tilde{h}_1 \oplus \tilde{h}_2) = \lambda \tilde{h}_1 \oplus \lambda \tilde{h}_2, \lambda > 0;$$

$$\textcircled{4} \lambda_1 \tilde{h} \oplus \lambda_2 \tilde{h} = (\lambda_1 + \lambda_2) \tilde{h}, \lambda_1, \lambda_2 > 0;$$

$$\textcircled{5} \tilde{h}^{\lambda_1} \otimes \tilde{h}^{\lambda_2} = \tilde{h}^{\lambda_1 + \lambda_2}, \lambda_1, \lambda_2 > 0;$$

$$\textcircled{6} \tilde{h}_1^\lambda \otimes \tilde{h}_2^\lambda = (\tilde{h}_1 \otimes \tilde{h}_2)^\lambda, \lambda > 0.$$

设 $\tilde{h}_i (i = 1, 2, \dots, I)$ 为一列 WPIVIHFES, 对应权重向量 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_I)^T$, 满足 $\omega_i \geq 0$ 并且 $\sum_{i=1}^I \omega_i = 1$,

$\tilde{h}_i (i = 1, 2, \dots, I)$ 中的元素数目相等用符合 $\# \tilde{h}_i$ 表示。根据定义 5 的运算法则有

① 加权概率区间值直觉犹豫模糊有序加权平均(WPIVIHFOWA)算子

$$\begin{aligned} \text{WPIVIHFOWA}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_I) &= \bigoplus_{i=1}^I \omega_i \tilde{h}_i = \{(([\ 1 - \prod_{i=1}^I (1 - u_i^{(k)-})^{\omega_i}, 1 - \prod_{i=1}^I (1 - u_i^{(k)+})^{\omega_i}], \\ &\quad [1 - \prod_{i=1}^I (1 - v_i^{(k)-})^{\omega_i}, 1 - \prod_{i=1}^I (1 - v_i^{(k)+})^{\omega_i}]), \overline{\prod_{i=1}^I P_{ik}}, \overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}) | \overline{\prod_{i=1}^I P_{ik}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^I P_{ik}}{\sum_{k'=1}^{\# \tilde{h}_i} \prod_{i'=1}^I P_{i'k'}}, \overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}{\sum_{k'=1}^{\# \tilde{h}_i} \sum_{i'=1}^I \omega_{i'k'}}, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i \} \end{aligned} \quad (5)$$

② 加权概率区间值直觉犹豫模糊有序加权几何(WPIVIHFOWG)算子

$$\begin{aligned} \text{WPIVIHFOWG}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_I) &= \bigotimes_{i=1}^I \tilde{h}_i^{\omega_i} = \{(([\ \prod_{i=1}^I (u_i^{(k)-})^{\omega_i}, \prod_{i=1}^I (u_i^{(k)+})^{\omega_i}], \\ &\quad [\prod_{i=1}^I (v_i^{(k)-})^{\omega_i}, \prod_{i=1}^I (v_i^{(k)+})^{\omega_i}]), \overline{\prod_{i=1}^I P_{ik}}, \overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}) | \overline{\prod_{i=1}^I P_{ik}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^I P_{ik}}{\sum_{k'=1}^{\# \tilde{h}_i} \prod_{i'=1}^I P_{i'k'}}, \overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}{\sum_{k'=1}^{\# \tilde{h}_i} \sum_{i'=1}^I \omega_{i'k'}}, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i \} \end{aligned} \quad (6)$$

1.3 Maclaurin 对称平均算子

定义 6 令 $a_i (i = 1, 2, \dots, n)$ 为一组非负实数, 且有 $r = 1, 2, \dots, n$. 若满足

$$\text{MSM}^{(r)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = [\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq n} \prod_{j=1}^r a_{i_j} / C_n^r]^{\frac{1}{r}} \quad (7)$$

则称式(7)为 MSM 算子, 这里 $i_1, i_2, \dots, i_r$ 为 $1, 2, \dots, n$ 中所有任意组合的一切 r 元组, 系数 $C_n^r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$ 为二

项式。容易验证 MSM 算子具有以下性质:

$$\textcircled{1} \text{对于任意的 } i, \text{若 } a_i = a \geq 0, \text{则 } \text{MSM}^{(r)}(a_1, a_2, \dots, a_n) = a;$$

$$\textcircled{2} \text{对于任意的 } i, \text{若 } 0 \leq a_i \leq b_i, \text{则 } \text{MSM}^{(r)}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \text{MSM}^{(r)}(b_1, b_2, \dots, b_n);$$

$$\textcircled{3} \text{对于任意的 } a_i \geq 0, \text{Min}(a_1, a_2, \dots, a_n) \leq \text{MSM}^{(r)} \leq \text{Max}[(a_1, a_2, \dots, a_n)].$$

2 WPIVIHFMSM 算子及其性质

定义 7 设 $\tilde{h}_i (i = 1, 2, \dots, I)$ 为一列 WPIVIHFES, 且 $r = 1, 2, \dots, I$, 则 WPIVIHFMSM^(r) 定义如下

$$\text{WPIVIHFMSM}^{(r)}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_I) = (\bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} \bigotimes_{j=1}^r \tilde{h}_{i_j} / C_I^r)^{\frac{1}{r}} \quad (8)$$

式(8)中, $i_1, i_2, \dots, i_r$ 为 $1, 2, \dots, I$ 中所有任意组合的 r 元组, 系数 $C_l^r = \frac{I!}{r!(I-r)!}$ 为二项式。

定理 2 设 $\tilde{h}_i (i = 1, 2, \dots, I)$ 为一列具有 I 个元素的 WPIVIHFEs, 其中所有 WPIVIHFE 的元素数目全部相等, 则采用 WPIVIHFMSM^(r) 算子对 $\tilde{h}_i (i = 1, 2, \dots, I)$ 的集成结果仍为 WPIVIHFE, $\# \tilde{h}_i$ 表示 $\tilde{h}_i$ 中的元素数量。即有

$$\begin{aligned} & \text{WPIVIHFMSM}^{(r)}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_I) \\ &= \{((([f^{-1}(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} f(g^{-1}(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)-)}))) / C_l^r]^{\frac{1}{r}} f^{-1}(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} f(g^{-1}(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)+}))) / C_l^r]^{\frac{1}{r}}], \\ & \quad [g^{-1}(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} g(f^{-1}(\sum_{j=1}^r f(v_{i_j}^{(k)-}))) / C_l^r]^{\frac{1}{r}} g^{-1}(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} g(f^{-1}(\sum_{j=1}^r f(v_{i_j}^{(k)+}))) / C_l^r]^{\frac{1}{r}})], \\ & \quad \overline{\prod_{i=1}^I P_{ik}}, \overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}) \prod_{i=1}^I P_{ik} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^I P_{ik}}{\sum_{k=1}^{\# \tilde{h}_i} \prod_{i'=1}^I P_{i'k'}} \overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}{\sum_{k=1}^{\# \tilde{h}_i} \sum_{i'=1}^I \omega_{i'k'}}, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i \} \end{aligned} \quad (9)$$

证明 由定义 5 与定义 7 可得

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \bigotimes_{j=1}^r \tilde{h}_{i_j} &= \{((([g^{-1}(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)-})), g^{-1}(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)+}))], [f^{-1}(\sum_{j=1}^r f(v_{i_j}^{(k)-})), f^{-1}(\sum_{j=1}^r f(v_{i_j}^{(k)+}))]) \prod_{i=1}^I P_{ik}, \\ & \quad \overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}) \prod_{i=1}^I P_{ik} = \frac{\prod_{i=1}^I P_{ik}}{\sum_{k=1}^{\# \tilde{h}_i} \prod_{i'=1}^I P_{i'k'}} \overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}{\sum_{k=1}^{\# \tilde{h}_i} \sum_{i'=1}^I \omega_{i'k'}}, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{2} \bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} \bigotimes_{j=1}^r \tilde{h}_{i_j} &= \{((([f^{-1}(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} f(g^{-1}(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)-}))), f^{-1}(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} f(g^{-1}(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)+})))]) \\ & \quad [g^{-1}(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} g(f^{-1}(\sum_{j=1}^r f(v_{i_j}^{(k)-}))), g^{-1}(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} g(f^{-1}(\sum_{j=1}^r f(v_{i_j}^{(k)+})))])], \\ & \quad \overline{\prod_{i=1}^I P_{ik}}, \overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}) \prod_{i=1}^I P_{ik} = \frac{\prod_{i=1}^I P_{ik}}{\sum_{k=1}^{\# \tilde{h}_i} \prod_{i'=1}^I P_{i'k'}} \overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}} \\ &= \frac{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}{\sum_{k=1}^{\# \tilde{h}_i} \sum_{i'=1}^I \omega_{i'k'}}, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i \} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \textcircled{3} (\bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} \bigotimes_{j=1}^r \tilde{h}_{i_j} / C_l^r)^{\frac{1}{r}} &= \{((([f^{-1}((\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} f(g^{-1}(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)-}))) / C_l^r)^{\frac{1}{r}}], \\ & \quad f^{-1}((\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} f(g^{-1}(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)+}))) / C_l^r)^{\frac{1}{r}}] [g^{-1}((\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} g(f^{-1}(\sum_{j=1}^r f(v_{i_j}^{(k)-}))) / C_l^r)^{\frac{1}{r}}], \\ & \quad g^{-1}((\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} g(f^{-1}(\sum_{j=1}^r f(v_{i_j}^{(k)+}))) / C_l^r)^{\frac{1}{r}})], \overline{\prod_{i=1}^I P_{ik} \sum_{i=1}^I \omega_{ik}}) \prod_{i=1}^I P_{ik} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^I P_{ik}}{\sum_{k=1}^{\# \tilde{h}_i} \prod_{i'=1}^I P_{i'k'}} \overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}{\sum_{k=1}^{\# \tilde{h}_i} \sum_{i'=1}^I \omega_{i'k'}}, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i \} \end{aligned}$$

以上皆有 $k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i$, 由①②③可知, 式(9)成立。

对 $\forall k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i, i = 1, 2, \dots, I$, 有 $0 \leq u_{i_j}^{(k)-} \leq u_{i_j}^{(k)+} \leq 1, 0 \leq v_{i_j}^{(k)-} \leq v_{i_j}^{(k)+} \leq 1$, $g(t)$ 和 $g^{-1}(t)$ 均为单调递减函数, $f(t)$ 和 $f^{-1}(t)$ 均为单调递增函数, 且满足 $f(t) = g(1-t)$, 故得以下式子

$$\begin{aligned} f^{-1}((\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} f(g^{-1}(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)+}))) / C_l^r)^{\frac{1}{r}}) &\geq f^{-1}((\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} f(g^{-1}(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)-}))) / C_l^r)^{\frac{1}{r}}) \\ g^{-1}((\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} g(f^{-1}(\sum_{j=1}^r f(v_{i_j}^{(k)+}))) / C_l^r)^{\frac{1}{r}}) &\geq g^{-1}((\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} g(f^{-1}(\sum_{j=1}^r f(v_{i_j}^{(k)-}))) / C_l^r)^{\frac{1}{r}}) \end{aligned}$$

又因为 $u_{i_j}^{(k)+} + v_{i_j}^{(k)+} \leq 1$, 即有 $u_{i_j}^{(k)+} \leq 1 - v_{i_j}^{(k)+}$, 对 $\forall k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i, i = 1, 2, \dots, I, \exists f(v_{i_j}^{(k)+}) = g(1 - v_{i_j}^{(k)+}) \leq g(u_{i_j}^{(k)+})$, 则

$$\begin{aligned} f^{-1}\left(\sum_{j=1}^r f(v_{i_j}^{(k)+})\right) &\leq f^{-1}\left(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)+})\right) = 1 - g^{-1}\left(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)+})\right) \\ g\left(f^{-1}\left(\sum_{j=1}^r f(v_{i_j}^{(k)+})\right)\right) &\geq g\left(1 - g^{-1}\left(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)+})\right)\right) = f\left(g^{-1}\left(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)+})\right)\right) \end{aligned}$$

进一步可得

$$\begin{aligned} &\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} g\left(f^{-1}\left(\sum_{j=1}^r f(v_{i_j}^{(k)+})\right)\right)\right) / C_I^r)^{\frac{1}{r}} \\ &\geq \left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} f\left(g^{-1}\left(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)+})\right)\right)\right) / C_I^r)^{\frac{1}{r}} g^{-1}\left(\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} g\left(f^{-1}\left(\sum_{j=1}^r f(v_{i_j}^{(k)+})\right)\right)\right) / C_I^r)^{\frac{1}{r}}\right) \\ &\leq g^{-1}\left(\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} f\left(g^{-1}\left(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)+})\right)\right)\right) / C_I^r)^{\frac{1}{r}}\right) \\ &= 1 - f^{-1}\left(\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} f\left(g^{-1}\left(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)+})\right)\right)\right) / C_I^r)^{\frac{1}{r}}\right), \end{aligned}$$

即
$$g^{-1}\left(\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} g\left(f^{-1}\left(\sum_{j=1}^r f(v_{i_j}^{(k)+})\right)\right)\right) / C_I^r)^{\frac{1}{r}}\right) + f^{-1}\left(\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} f\left(g^{-1}\left(\sum_{j=1}^r g(u_{i_j}^{(k)+})\right)\right)\right) / C_I^r)^{\frac{1}{r}}\right) \leq 1$$

由以上可知, WPIVIHFSM^(r)算子在对一系列 WPIVIHFEs 集成, 不会改变 WPIVIHFE 的本质特征, 即集成结果仍为 WPIVIHFE. 综上可知, 定理 2 成立.

WPIVIHFSM^(r)算子具有如下性质:

性质 1 (单调性) 设 $\tilde{h}_i, \tilde{\tilde{h}}_i$ 为 2 列 WPIVIHFEs, 规定 $\# \tilde{h}_i = \# \tilde{\tilde{h}}_i$, $\# \tilde{h}_i$ 与 $\# \tilde{\tilde{h}}_i$ 分别指 $\tilde{h}_i, \tilde{\tilde{h}}_i$ 元素个数. 其中

$$\begin{aligned} \tilde{h}_i &= \{([u_i^{(k)-}, u_i^{(k)+}], [v_i^{(k)-}, v_i^{(k)+}]), \tilde{P}_{ik}, \tilde{\omega}_{ik} | i = 1, 2, \dots, I, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i\} \\ \tilde{\tilde{h}}_i &= \{([\tilde{u}_i^{(k)-}, \tilde{u}_i^{(k)+}], [\tilde{v}_i^{(k)-}, \tilde{v}_i^{(k)+}]), \tilde{\tilde{P}}_{ik}, \tilde{\tilde{\omega}}_{ik} | i = 1, 2, \dots, I, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{\tilde{h}}_i\} \end{aligned}$$

如果有 $u_i^{(k)-} \geq \tilde{u}_i^{(k)-}, u_i^{(k)+} \geq \tilde{u}_i^{(k)+}, v_i^{(k)-} \leq \tilde{v}_i^{(k)-}, v_i^{(k)+} \leq \tilde{v}_i^{(k)+}$, 则有 WPIVIHFSM^(r)($\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_I$) $\geq$ WPIVIHFSM^(r)($\tilde{\tilde{h}}_1, \tilde{\tilde{h}}_2, \dots, \tilde{\tilde{h}}_I$).

性质 2 (有界性) 设 $\tilde{h}_i$ 为一系列 WPIVIHFEs, 对于 $i = 1, 2, \dots, I$, 令

$$\begin{aligned} \tilde{h}^- &= -\min_{i,k} \tilde{h}_i = \{([\min_{i,k} u_i^{(k)-}, \min_{i,k} u_i^{(k)+}], [\max_{i,k} v_i^{(k)-}, \max_{i,k} v_i^{(k)+}]), \min_{i,k} P_{ik}, \min_{i,k} \omega_{ik} | k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i\} \\ \tilde{h}^+ &= +\max_{i,k} \tilde{h}_i = \{([\max_{i,k} u_i^{(k)-}, \max_{i,k} u_i^{(k)+}], [\min_{i,k} v_i^{(k)-}, \min_{i,k} v_i^{(k)+}]), \max_{i,k} P_{ik}, \max_{i,k} \omega_{ik} | k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i\} \end{aligned}$$

则有 $\tilde{h}^- \leq \text{WPIVIHFSM}^{(r)}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_I) \leq \tilde{h}^+$.

性质 3 (幂等性) 设 $\tilde{h}_i$ 为 1 列 WPIVIHFEs, 若 $\forall i \in \{1, 2, \dots, I\}$, 有 $\tilde{h}_i = \tilde{h} = \{([u_i^{(k)-}, u_i^{(k)+}], [v_i^{(k)-}, v_i^{(k)+}]), P_{ik}, \omega_{ik} | i = 1, 2, \dots, I, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i\}$, 则一定有 WPIVIHFSM^(r)($\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_I$) $\leq \tilde{h}$.

性质 4 (置换不变性) 设 $\tilde{h}_i$ 为一系列 WPIVIHFEs, 若 $\tilde{\tilde{h}}_i$ 是 $\tilde{h}_i = (\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_I)$ 中的任意一个置换, 则 WPIVIHFSM^(r)($\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_I$) = WPIVIHFSM^(r)($\tilde{\tilde{h}}_1, \tilde{\tilde{h}}_2, \dots, \tilde{\tilde{h}}_I$).

定理 3 设 $\tilde{h}_i = \{([u_i^{(k)-}, u_i^{(k)+}], [v_i^{(k)-}, v_i^{(k)+}]), P_{ik}, \omega_{ik} | i = 1, 2, \dots, I, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i\}$ 为一系列 WPIVIHFEs, 其权重向量为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_I)^T$, 满足 $\omega_i \geq 0$ 并且 $\sum_{i=1}^I \omega_i = 1$. 若

$$\begin{aligned} \text{WPIVIHFSM}^{(r)}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_I) &= \left(\bigoplus_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} \bigotimes_{j=1}^r \tilde{h}_{i_j}^{\omega_{i_j}} / C_I^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left\{ \left[f^{-1}\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} f\left(g^{-1}\left(\sum_{j=1}^r \omega_{i_j} g(u_{i_j}^{(k)-})\right)\right)\right) / C_I^r\right]^{\frac{1}{r}}, \right. \\ &\quad \left. f^{-1}\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} f\left(g^{-1}\left(\sum_{j=1}^r \omega_{i_j} g(u_{i_j}^{(k)+})\right)\right)\right) / C_I^r\right]^{\frac{1}{r}}, \left[g^{-1}\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} g\left(f^{-1}\left(\sum_{j=1}^r \omega_{i_j} f(v_{i_j}^{(k)-})\right)\right)\right) / C_I^r\right]^{\frac{1}{r}}, \right. \\ &\quad \left. g^{-1}\left(\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_r \leq I} g\left(f^{-1}\left(\sum_{j=1}^r \omega_{i_j} f(v_{i_j}^{(k)+})\right)\right)\right) / C_I^r\right]^{\frac{1}{r}} \right\}, \prod_{i=1}^I P_{ik}, \sum_{i=1}^I \omega_{ik} \Big| \prod_{i=1}^I P_{ik} = \frac{\prod_{i=1}^I P_{ik}}{\sum_{k=1}^{\# \tilde{h}_i} \prod_{i=1}^I P_{i'k'}}, \end{aligned}$$

$$\overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}{\sum_{k'=1}^{\# \tilde{h}_i} \sum_{i'=1}^I \omega_{i'k'}}, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i \quad (10)$$

则称式(10)为 WPIVIHFWMSM^(r)算子。这里 $i_1, i_2, \dots, i_r$ 为 $1, 2, \dots, I$ 中所有任意组合的一切 r 元组, 系数 $C_r = \frac{I!}{r!(I-r)!}$ 为二项式。证明过程与定理2完全一致。

WPIVIHFWMSM^(r)取不同值时的几种特殊情形如下

① 当 $r = 1$ 时, 有

$$\begin{aligned} \text{WPIVIHFWMSM}^{(1)}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_I) &= \{((f^{-1}(\sum_{1 \leq i \leq I} \omega_i f(u_i^{(k)-})/I), f^{-1}(\sum_{1 \leq i \leq I} \omega_i f(u_i^{(k)+})/I), [g^{-1}(\sum_{1 \leq i \leq I} \omega_i g(u_i^{(k)-})/I), \\ &\quad g^{-1}(\sum_{1 \leq i \leq I} \omega_i g(u_i^{(k)+})/I)]), \overline{\prod_{i=1}^I P_{ik}}, \overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}) | \overline{\prod_{i=1}^I P_{ik}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^I P_{ik}}{\sum_{k'=1}^{\# \tilde{h}_i} \prod_{i'=1}^I P_{i'k'}}, \overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}{\sum_{k'=1}^{\# \tilde{h}_i} \sum_{i'=1}^I \omega_{i'k'}}, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i \} \end{aligned}$$

② 当 $r = 2$ 时, 有

$$\begin{aligned} \text{WPIVIHFWMSM}^{(2)}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_I) &= \{((f^{-1}((2 \sum_{1 \leq i < j \leq I} \omega_i \omega_j f(u_i^{(k)-} u_j^{(k)-})/I(I-1))^{\frac{1}{2}}), f^{-1}((2 \sum_{1 \leq i < j \leq I} \omega_i \omega_j f(u_i^{(k)+} u_j^{(k)+})/I(I-1))^{\frac{1}{2}}), \\ &\quad [g^{-1}((2 \sum_{1 \leq i < j \leq I} \omega_i \omega_j g(v_i^{(k)-} v_j^{(k)-})/I(I-1))^{\frac{1}{2}}), g^{-1}((2 \sum_{1 \leq i < j \leq I} \omega_i \omega_j g(v_i^{(k)+} v_j^{(k)+})/I(I-1))^{\frac{1}{2}})]), \\ &\quad \overline{\prod_{i=1}^I P_{ik}}, \overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}) | \overline{\prod_{i=1}^I P_{ik}} = \frac{\prod_{i=1}^I P_{ik}}{\sum_{k'=1}^{\# \tilde{h}_i} \prod_{i'=1}^I P_{i'k'}}, \overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}{\sum_{k'=1}^{\# \tilde{h}_i} \sum_{i'=1}^I \omega_{i'k'}}, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i \} \end{aligned}$$

③ 当 $r = I$ 时, 有

$$\begin{aligned} \text{WPIVIHFWMSM}^{(I)}(\tilde{h}_1, \tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_I) &= \{((f^{-1}(\sum_{1=i_1 < \dots < i_I \neq I} \prod_{j=1}^I \omega_j f(\prod_{j=1}^I u_j^{(k)-}))^{\frac{1}{I}}, f^{-1}(\sum_{1=i_1 < \dots < i_I \neq I} \prod_{j=1}^I \omega_j f(\prod_{j=1}^I u_j^{(k)+}))^{\frac{1}{I}}), \\ &\quad [g^{-1}(\sum_{1=i_1 < \dots < i_I \neq I} \prod_{j=1}^I \omega_j g(\prod_{j=1}^I v_j^{(k)-}))^{\frac{1}{I}}, g^{-1}(\sum_{1=i_1 < \dots < i_I \neq I} \prod_{j=1}^I \omega_j g(\prod_{j=1}^I v_j^{(k)+}))^{\frac{1}{I}})], \\ &\quad \overline{\prod_{i=1}^I P_{ik}}, \overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}) | \overline{\prod_{i=1}^I P_{ik}} \\ &= \frac{\prod_{i=1}^I P_{ik}}{\sum_{k'=1}^{\# \tilde{h}_i} \prod_{i'=1}^I P_{i'k'}}, \overline{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}} = \frac{\sum_{i=1}^I \omega_{ik}}{\sum_{k'=1}^{\# \tilde{h}_i} \sum_{i'=1}^I \omega_{i'k'}}, k = 1, 2, \dots, \# \tilde{h}_i \} \end{aligned}$$

3 决策过程

在 WPIVIHFS 多属性群决策问题中, 设备选方案集合 $A = \{a_1, a_2, \dots, a_i, \dots, a_I\}$, 测评属性集合 $G = \{g_1, g_2, \dots, g_j, \dots, g_J\}$, 其权重向量分别为 $\omega = (\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_J)$, 其中 $\omega_j \geq 0$ 并且 $\sum_{j=1}^J \omega_j = 1$. 决策专家集合为 $Z = \{z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_T\}$, 其权重向量为 $\bar{\omega} = (\bar{\omega}_1, \bar{\omega}_2, \dots, \bar{\omega}_T)$, 决策专家组针对备选方案进行测评, 进而构建评估矩阵 $H = (\tilde{h}_{ij})_{I \times J}$. 具体步骤如下:

步骤1 根据决策专家组采用 WPIVIHFS 描述的备选方案测评数据信息, 构建 WPIVIHFS 决策矩阵 $H = (\tilde{h}_{ij})_{I \times J}$;

步骤2 标准化评估矩阵 $H = (\tilde{h}_{ij})_{I \times J}$. 属性为成本型时, 则将 $\tilde{h}_{ij}$ 替换为 $\tilde{h}_{ij}^c$, 效益型则无需替换;

步骤3 分别采用式(3)、式(4)、式(10)计算每个方案的综合属性值 $F(\tilde{a}_i)$ (计算结果仍为 WPIVIHFE);

步骤4 根据 $F(\tilde{a}_i)$ 计算每个 a_i 得分函数值 $\tilde{S}(\tilde{a}_i)$ 或精确函数值 $\tilde{E}(\tilde{a}_i)$;

步骤5 利用 $\tilde{S}(\tilde{a}_i)$ 和 $\tilde{E}(\tilde{a}_i)$ 对所有方案排序。

4 案例分析

为了提高城市日处理垃圾能力,给市民提供一个美好的居住环境,同时破解“垃圾围城”现象,实现垃圾资源化、无害化以及减量化目标,某新一线城市按照“十四五”规划的发展要求,拟在辖区内建造一座日处理垃圾量为3000吨的垃圾焚烧电站。经政府对辖区内土地调研与分析,有4个地方可供选择(决策方案 $a_i(i=1,2,3,4)$)。为了科学高效地选择场地,市政府与规划局联合邀请5位专家 $Z=\{z_1, z_2, \dots, z_5\}$,从经济因素、技术因素、自然因素以及社会因素4个评价指标($g_j(j=1,2,3,4)$)来详细评估以上4个备选地址。5位专家的权重分别为 $\bar{\omega}_1=0.10, \bar{\omega}_2=0.15, \bar{\omega}_3=0.25, \bar{\omega}_4=0.30, \bar{\omega}_5=0.20$ 。4个评价指标的权重分别为 $\omega_1=0.22, \omega_2=0.20, \omega_3=0.28, \omega_4=0.30$ 。评价信息以WPIVIHFS形式给出(如下所示)。应用文章决策模型优选适合建垃圾焚烧电站的地址。

$$\begin{aligned} a_1g_1 &= ([0.21, 0.32], [0.34, 0.42]), 0.40, 0.40; ([0.41, 0.46], [0.45, 0.51]), 0.60, 0.60; \\ a_1g_2 &= ([0.31, 0.53], [0.41, 0.44]), 0.40, 0.35; ([0.24, 0.42], [0.53, 0.55]), 0.60, 0.65; \\ a_1g_3 &= ([0.43, 0.51], [0.43, 0.47]), 0.40, 0.40; ([0.28, 0.46], [0.24, 0.38]), 0.60, 0.60; \\ a_1g_4 &= ([0.21, 0.44], [0.36, 0.51]), 0.60, 0.55; ([0.39, 0.48], [0.43, 0.52]), 0.40, 0.45; \\ a_2g_1 &= ([0.32, 0.43], [0.44, 0.52]), 0.40, 0.45; ([0.22, 0.49], [0.35, 0.51]), 0.60, 0.55; \\ a_2g_2 &= ([0.45, 0.60], [0.29, 0.40]), 0.40, 0.55; ([0.31, 0.51], [0.22, 0.44]), 0.60, 0.45; \\ a_2g_3 &= ([0.23, 0.35], [0.35, 0.46]), 0.40, 0.30; ([0.29, 0.42], [0.37, 0.45]), 0.60, 0.70; \\ a_2g_4 &= ([0.31, 0.39], [0.41, 0.54]), 0.60, 0.50; ([0.28, 0.48], [0.39, 0.46]), 0.40, 0.50; \\ a_3g_1 &= ([0.34, 0.46], [0.39, 0.49]), 0.40, 0.25; ([0.21, 0.34], [0.31, 0.46]), 0.60, 0.75; \\ a_3g_2 &= ([0.41, 0.47], [0.29, 0.53]), 0.60, 0.65; ([0.23, 0.35], [0.34, 0.55]), 0.40, 0.35; \\ a_3g_3 &= ([0.46, 0.57], [0.31, 0.42]), 0.60, 0.75; ([0.31, 0.45], [0.49, 0.55]), 0.40, 0.25; \\ a_3g_4 &= ([0.23, 0.35], [0.34, 0.45]), 0.40, 0.55; ([0.12, 0.24], [0.35, 0.46]), 0.60, 0.45; \\ a_4g_1 &= ([0.34, 0.56], [0.39, 0.44]), 0.40, 0.40; ([0.45, 0.57], [0.35, 0.39]), 0.60, 0.60; \\ a_4g_2 &= ([0.35, 0.57], [0.29, 0.39]), 0.40, 0.30; ([0.34, 0.56], [0.23, 0.44]), 0.60, 0.07; \\ a_4g_3 &= ([0.29, 0.44], [0.45, 0.56]), 0.40, 0.40; ([0.34, 0.56], [0.23, 0.34]), 0.60, 0.60; \\ a_4g_4 &= ([0.31, 0.45], [0.34, 0.45]), 0.60, 0.55; ([0.35, 0.46], [0.33, 0.49]), 0.40, 0.45. \end{aligned}$$

步骤1 根据决策专家组给予备选地址的评估信息,构建WPIVIHFS决策矩阵 $H=(\tilde{h}_{ij})_{4 \times 4}$ 。

步骤2 由于经济因素、技术因素、自然因素以及社会因素等皆为效益型,因此决策矩阵 $H=(\tilde{h}_{ij})_{4 \times 4}$ 中的评价数据无需进行转换处理。

步骤3 根据决策专家组给予备选地址的评估信息,利用式(3)、式(4)、式(10)分别计算4个备选地址的综合属性数据信息 $F(\tilde{a}_i)$ 。这里选取 $g(t)=-\ln t$ 。具体计算结果以及比较结果如表1所示。

表1 不同算子下的备选地址排序结果

算子	a_1	a_2	a_3	a_4	排序结果
WPIVIHFOWA	-0.0145	0.0400	-0.0212	0.0542	$a_4 > a_3 > a_1 > a_2$
WPIVIHFOWG	-0.0311	-0.0359	0.0006	0.0561	$a_4 > a_3 > a_1 > a_2$
WPIVIHFWMSM ⁽¹⁾	-0.0145	-0.0198	-0.0014	0.0154	$a_4 > a_3 > a_1 > a_2$
WPIVIHFWMSM ⁽²⁾	-0.0001	-0.0010	-0.0014	0.0154	$a_4 > a_1 > a_2 > a_3$
WPIVIHFWMSM ⁽³⁾	-0.0078	-0.0028	-0.0016	0.0135	$a_4 > a_3 > a_2 > a_1$
WPIVIHFWMSM ⁽⁴⁾	-0.0144	-0.0145	-0.0124	0.0159	$a_4 > a_3 > a_1 > a_2$

由表1可知,基于3类算子建立的6个决策模型共取得3种排序结果。6个决策模型得到的排序结果皆认为备选地址 a_4 最适合建立垃圾焚烧电站,说明三类算子在对最优方案的选择上具有很好的稳定性。在利用WPIVIHFWMSM^(r)算子排序备选地址的过程中,当参数 r 取值不同时,排序结果发生了变化。由于其充分考虑了经济因素、技术因素、自然因素以及社会因素4个评价指标之间的相互关系,因此能够从更多角度出

发对4个备选地址排序,进而筛序出更符合客观实际的排序结果。而WPIVIHFOWA算子与WPIVIHFOWG算子皆是从单个维度对4个备选地址排序,在分析排序结果时缺少直观的对比依据。虽然在本案中取得了理想的决策效果,但是在实践中能否有效推广还有待进一步检验。

4 结论

文章将决策专家权重注入PIVIHFS中定义了WPIVIHFS. 建立WPIVIHFOWA算子与WPIVIHFOWG算子模型,同时将MSM算子引入到解决WPIVIHFS多属性群决策问题中(将MSM算子与AN结合,定义WPIVIHFWSM^(r)算子),并利用建立的三种算子解决某新一线城市建设垃圾焚烧电站选址问题。文章决策理论与方法具有以下特点:

(1)在WPIVIHFS中包含了决策专家的权重,充分体现了每位决策专家的决策作用,因此蕴含的决策信息更加全面,与PIVIHFS相比,基于WPIVIHFS理论建立的决策方法适用性更强(文章决策案例中,评价指标权重采用主观权重,若评价指标采用客观权重或综合权重,则需要利用WPIVIHFE决策数据信息计算。由于WPIVIHFE中拥有决策专家权重,与利用PIVIHFE决策数据信息计算出的评价指标权重结果相比,这势必会影响评价指标的权重分配,进而是否会导致决策结果的变化,有待后续的进一步研究);

(2)文章在原始的评审数据信息中已包含决策专家的权重,因此决策专家的重要性体现在决策全过程中(一般情况下,决策专家权重只在最后获取方案综合决策值的集成算子中进行体现);

(3)由WPIVIHFWSM^(r)算子与WPIVIHFOWA算子、WPIVIHFOWG算子糅合方案综合属性值的过程可知,WPIVIHFWSM^(r)算子可以多元化分析方案的排序过程,能够兼顾各个决策指标之间的关系,因而WPIVIHFWSM^(r)算子能够体现更高的决策标准,可以更好地处理多属性群决策问题。

接下来的工作是进一步开展WPIVIHFS集成算子和加权犹豫模糊语言术语集的研究,从而更加深入开展处理WPIVIHFS群决策问题的方法研究,为解决WPIVIHFS群决策问题提供新思路与新路径。

参考文献:

- [1] TORRA V. Hesitant Fuzzy Sets[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2010, 25(06): 529-539.
- [2] 朱国成,陈利群. 一种在犹豫模糊环境下的决策方法及应用[J]. 韶关学院学报, 2021, 42(12): 8-13.
- [3] 于森,孙贵东,李双明. 犹豫模糊距离测度分析及其在决策层融合识别中的应用[J]. 电子学报, 2024, 52(01): 181-192.
- [4] 张志伟,卜良桃,张婷,等. 基于犹豫模糊集的TOPSIS多属性决策方法及其应用[J]. 施工技术(中英文), 2024, 53(05): 76-82, 89.
- [5] 曹磊,戴俊杰,毛小燕,等. 基于犹豫模糊集的水质评价方法[J]. 宁波大学学报(理工版), 2024, 37(01): 51-57.
- [6] 张家贤,涂继亮,刘辉,等. 基于犹豫模糊混合云模型的航空装备保障系统效能评估[J]. 火力与指挥控制, 2024, 49(02): 18-25, 32.
- [7] WEI Y X, WANG Q H. New Distances for Dual Hesitant Fuzzy Sets and Their Application in Clustering Algorithm[J]. Journal of Intelligent & Fuzzy Systems, 2021, 41(06): 6221-6232.
- [8] ALI J, BASHIR Z, RASHID T. On Distance Measure and TOPSIS Model for Probabilistic Interval-valued Hesitant Fuzzy Sets: Application to Healthcare Facilities in Public Hospitals[J]. Grey Systems: Theory and Application, 2022, 12(01): 197-229.
- [9] WU S S, LIN J, ZHANG Z Y. New Distance Measures of Hesitant Fuzzy Linguistic Term Sets[J]. Physica Scripta, 2021, 96(01): 5002-5012.
- [10] 吴双胜,林杰,杨玉舒,等. 犹豫模糊语言距离测度及其在多属性决策中的应用[J]. 运筹与管理, 2023, 32(02): 61-67.
- [11] ZHU B, XU Z S. Probabilistic-hesitant Fuzzy Sets and Representation of Preference Relations[J]. Technological and Economic Development of Economy, 2018, 24(03): 1029-1040.
- [12] 曾文艺,李德清,尹乾. 加权犹豫模糊集的群决策方法[J]. 控制与决策, 2019, 34(03): 527-534.
- [13] 朱国成,张娟,徐健. 概率区间值犹豫模糊集多属性群决策模型及其应用[J]. 中国计量大学学报, 2024, 35(01): 106-115.
- [14] 张艳娜,张丽霞,王拥兵. 基于几何平均犹豫度的概率犹豫模糊多属性决策方法[JOL]. 郑州大学学报(理学版): 1-8.
- [15] 朱国成,陈煜,陈翠盈. 概率犹豫模糊集的向量测度法及决策应用[J]. 中央民族大学学报(自然科学版), 2023, 32(03): 44-52, 68.
- [16] 王莉莉,游亮,项华春. 基于后悔理论和概率犹豫模糊集的多属性决策方法[J]. 数学的实践与认识, 2023, 53(07): 255-264.

- [17] LIN M W, ZHAN Q S, XU Z S. Decision Making with Probabilistic Hesitant Fuzzy Information based on Multiplicative Consistency[J]. International Journal of Intelligent Systems, 2020, 35(08): 1233–1261.
- [18] 朱国成. 概率犹豫模糊集的再定义及其在群决策中的应用[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2023, 49(01): 61–69.
- [19] LI J, NIU L L, CHEN Q X, et al. A Consensus-based Approach for Multi-criteria Decision Making with Probabilistic Hesitant Fuzzy Information[J]. Soft Computing, 2020, 24(20): 15577–15594.
- [20] JIN F F, GARFG H, PEI L D, et al. Multiplicative Consistency Adjustment Model and Data Envelopment Analysis-driven Decision-making Process with Probabilistic Hesitant Fuzzy Preference Relations [J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2020, 22(07): 2319–2332.
- [21] 朱国成, 张娟, 徐健. 加权犹豫模糊集的向量测度法与决策应用[J]. 新疆师范大学学报(自然科学版), 2023, 42(04): 18–25.
- [22] 朱国成. 加权犹豫模糊集多属性群决策算法及其应用[J]. 吉首大学学报(自然科学版), 2023, 44(04): 9–18.
- [23] 高培根, 锁斌. 基于加权犹豫模糊集的实验设计与分阶段 PSO-Kriging 建模[J]. 计算机应用, 2024, 44(07): 2144–2150.
- [24] 冯雪, 耿生玲, 李永明. 加权犹豫模糊偏好关系及其在群体决策中的应用[J]. 山东大学学报(理学版), 2023, 58(03): 39–47.
- [25] 贾新玲, 王拥兵. 加权犹豫模糊集的 Lance 距离测度及其应用[J]. 安庆师范大学学报(自然科学版), 2022, 28(01): 59–67.
- [26] 朱国成, 徐健. 基于融合专家综合权重的 WPHFS 多属性群决策模型[J]. 中国计量大学学报, 2023, 34(01): 151–162.
- [27] LIU P D. The Aggregation Operators based on Archimedean T-conorm and T-norm for Single-valued Neutrosophic Numbers and their Application to Decision Making[J]. International Journal of Fuzzy Systems, 2016, 18(05): 849–863.
- [28] MACLAURIN C. Concerning the Roots of Equations, with the Demonstration of Other Rules in Algebra [J]. Philosophical Transactions of the Royal Society of London, 2006, 36(408): 59–96.
- [29] ZHANG Z M. Interval-valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Aggregation Operators and Their Application in Group Decision Making[J]. Journal of Applied Mathematics, 2013, (02): 1–33.
- [30] LUO S H, LIU J. The Probabilistic Interval-valued Hesitant Pythagorean Fuzzy Set and Its Application in Selecting Processes of Project Private Partner[J]. IEEE Access, 2019, 7(01): 170304–170321.

Weighted Probabilistic Interval Valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Sets Multi-attribute Group Decision Making Method and Its Application

ZHU Guo-cheng^{1,2}, HE Hui-juan¹, CHEN Cui-ying¹

(1.School of General Education, Guangdong Innovative Technical College, Dongguan, Guangdong, 523960, China; 2.International Business School, Jinan University, Zhuhai, Guangdong, 519070, China)

Abstract: In order to store more decision information in Probabilistic Interval Valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Sets (PIVIHFS) and deal with decision problems more scientifically, a Weighted Probabilistic Interval Valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Set (WPIVIHFS) is defined by assigning decision expert weight to each Probabilistic Interval Valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Set number in PIVIHFS. The weighted score function model and the weighted precision function model of Weighted Probabilistic Interval Valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Element (WPIVIHFE) and the size comparison rules of two WPIVIHFE are established. The Weighted Probabilistic Interval Valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Ordered Weighted Average (WPIVIHFOWA) operator, Weighted Probabilistic Interval Valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Ordered Weighted Geometry (WPIVIHFOWG) operator and Weighted Probabilistic Interval Valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Weighted Maclaruin Symmetric Average (WPIVIHFWMSM) operator models are established. At the same time, the expression form and properties of WPIVIHFWMSM operator are studied. Based on the above three operators, a set of decision method is constructed, and the rationality of WPIVIHFS theory and the feasibility of the decision method are verified by numerical examples.

Keywords: Weighted Probabilistic Interval Valued Intuitionistic Hesitant Fuzzy Set; WPIVIHFWMSM operator; Weighted score function; Weighted exact function