

基于PD控制的一类考虑有限治疗资源的时滞扩散恶意软件传播模型

郭佳¹, 李婷^{1*}, 王怀柱²

(1. 宁夏大学 数学统计学院, 宁夏 银川 750021; 2. 宁夏大学 前沿交叉学院, 宁夏 中卫 755000)

摘要:为探究恶意软件在物联网系统中的时空动态传播特性,文章基于微分方程理论建立了一类考虑有限治疗资源的时滞扩散恶意软件传播模型。通过分析相关特征方程,给出了Turing不稳定和Hopf分岔出现的条件。为提高系统稳定性,在模型中引入Proportional-Derivative (PD)控制器,对受控模型的稳定性进行分析。数值模拟验证了理论推导的正确性,并表明PD控制能够通过调节控制参数,实现对Turing不稳定和Hopf分岔的有效控制。

关键词:物联网;恶意软件;时滞扩散;有限治疗资源;PD控制

中图分类号: O193 **文献标识码:** A **文章编号:** 1008-9659(2026)03-0091-11

物联网(IoT)是指以互联网为媒介将各类设备相互连接,实现数据共享及智能化控制的一种新兴网络^[1]。IoT广泛应用于智能医疗、智能交通和农业监控等多个领域,它的出现使人们的生活充满无限可能^[2]。然而,IoT应用场景的不断扩展为恶意软件的传播提供了机会。2016年,恶意软件Mirai利用IoT设备中的漏洞,攻击了近40万台联网设备^[1]。2022年1月1日,葡萄牙最大的媒体集团Impresa受到了勒索软件Lapsus\$的攻击,导致该集团所有网站、周报和电视频道瘫痪。因此,为保护用户的隐私及数据安全,确保系统的正常运行,研究恶意软件在IoT系统中的传播特性并制定相关控制策略十分重要。

恶意软件的传播过程与流行病相似,一些学者以经典流行病SIR模型为基础建立了不同类型的恶意软件传播模型,如,SIR^[3]、SIRS^[4]、SEIR^[5]和SEIRS^[6]等。随着研究的不断深入,学者们相继对上述模型进行了扩展。Gao等人^[7]在SEIR模型的基础上引入隔离策略(Q),为控制蠕虫病毒的传播提供了理论依据。Yu等人^[8]在网络物理系统中考虑了感染率对恶意软件传播速度和范围的影响,提出了具有两种不同感染率的SEIRS模型。在恶意软件传播过程中,时滞的存在是不可忽略的。王彬等人^[9]和Yu等人^[10]分别在恶意软件传播模型中考虑了潜伏期时滞和免疫期时滞的存在,讨论了时滞对模型稳定性的影响。杨芳芳等人^[11]在建立无线传感网络病毒传播模型时,同时考虑了潜伏期和免疫期两种时滞,对不同时滞条件下模型的稳定性进行了分析。

恶意软件的传播不仅依赖于时间的变化,还与设备的移动性和空间分布有关。大多数IoT设备具有可移动性,易感设备进入感染设备的通信范围时,将会面临被感染的风险^[12]。为了更贴合恶意软件的实际传播过程,学者们在模型中引入了扩散因子,将传统动力学模型从时间演化拓展到了时空演化^[13]。需要注意的是,时滞和扩散因子可能会引起Hopf分岔和Turing不稳定,影响系统的稳定性,甚至导致恶意软件的大规模爆发。针对这一问题,学者们提出了时滞反馈控制^[17]、状态反馈控制^[18]和混合控制^[19]等一系列控制策略。

[收稿日期] 2025-05-19

[修回日期] 2025-09-27

[基金项目] 宁夏自然科学基金项目(2025AAC030163);宁夏自然科学基金项目(2024AAC03038);国家自然科学基金资助项目(72461029)。

[作者简介] 郭佳(2001-),女,硕士研究生,主要从事恶意软件传播动力学方面研究,E-mail: 13259686506@163.com.

* [通讯作者] 李婷(1974-),女,教授,主要从事非线性动力学方面研究,E-mail: l.ting@nxu.edu.cn.

在IoT系统中,抵御和清除恶意软件的过程面临着与流行病相似的资源限制问题。设备中的大部分资源均用于程序的运行,只有部分有限资源用于保障设备的安全,这在一定程度上限制了设备的防控能力^[20]。此外,IoT系统中的设备数量庞大且种类繁多,杀毒软件的更新和补丁安装难以覆盖所有设备。Yang等人^[21]在传统SIRS模型的基础上建立了一类考虑资源限制的计算机病毒传播模型,但其未考虑时滞和扩散因子的存在。为了更准确描述恶意软件在IoT系统中的传播过程,文章将在文献[21]的基础上引入扩散因子和时滞(潜伏期时滞和隔离期时滞,这里的隔离期时滞指杀毒软件检测感染设备以及进行隔离操作需要的时间),建立一类考虑有限治疗资源的SIQR时滞扩散恶意软件传播模型,并对其动力学行为进行分析。同时,为了有效控制恶意软件的传播,在模型中引入PD控制^[22],对由时滞和扩散因子引起的Hopf分岔和Turing不稳定进行控制,提高系统的稳定性。

1 模型描述

文章将IoT系统中的设备分为以下四种状态:易感状态(S)、感染状态(I)、隔离状态(Q)和恢复状态(R),四种状态间的转换关系如图1所示。 Λ 为易感设备的进入率, μ 为各状态设备的自然退出率。部分感染设备和隔离设备会因恶意软件的攻击而停止运行,分别以退出率 m 和 n 退出系统。 h 表示在免疫机制作用下,易感设备到恢复设备的转化率。 $\beta I(x, t - \tau_1)/(1 + \alpha I(x, t - \tau_1))$ 为易感设备受到恶意软件攻击后成为感染设备的实际感染率,其中, α 为抑制效果系数, τ_1 表示恶意软件的潜伏期时滞, θ 为感染设备到隔离设备的转化率, τ_2 为隔离期时滞。由于IoT系统中的可用治疗资源有限,随着感染设备数量的不断增多,杀毒软件对感染设备和隔离设备的治疗率将达到饱和状态。因此采用非线性饱和治疗函数描述治疗资源的有限性。 $\eta/(1 + \sigma I(x, t))$ 表示感染设备的实际治疗率, $\varphi/(1 + \sigma I(x, t))$ 表示隔离设备的实际治疗率, σ 反映了感染设备数量对于治疗率的抑制效果。

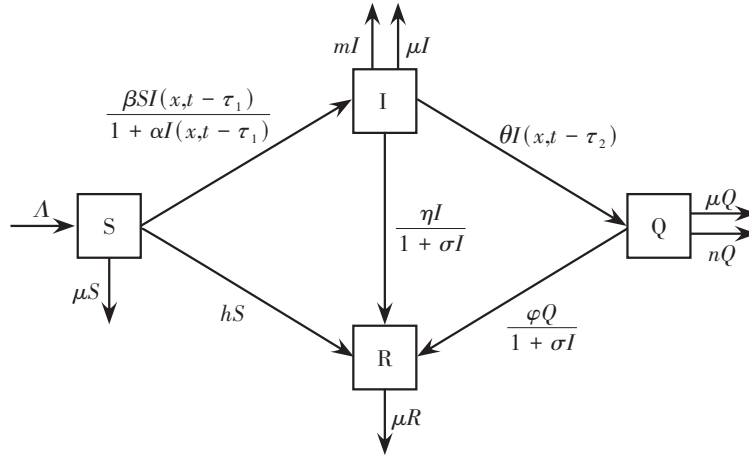


图1 IoT系统中的设备状态转换关系图

基于上述分析,考虑有限治疗资源的SIQR时滞扩散恶意软件传播模型建立如下

$$\begin{cases} \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = d_1 \Delta S(x, t) + \Lambda - \frac{\beta S(x, t) I(x, t - \tau_1)}{1 + \alpha I(x, t - \tau_1)} - hS(x, t) - \mu S(x, t) \\ \frac{\partial I(x, t)}{\partial t} = d_2 \Delta I(x, t) + \frac{\beta S(x, t) I(x, t - \tau_1)}{1 + \alpha I(x, t - \tau_1)} - \theta I(x, t - \tau_2) - \frac{\eta I(x, t)}{1 + \sigma I(x, t)} - mI(x, t) - \mu I(x, t) \\ \frac{\partial Q(x, t)}{\partial t} = d_3 \Delta Q(x, t) + \theta I(x, t - \tau_2) - \frac{\varphi Q(x, t)}{1 + \sigma I(x, t)} - nQ(x, t) - \mu Q(x, t) \\ \frac{\partial R(x, t)}{\partial t} = d_4 \Delta R(x, t) + hS(x, t) + \frac{\varphi Q(x, t)}{1 + \sigma I(x, t)} + \frac{\eta I(x, t)}{1 + \sigma I(x, t)} - \mu R(x, t) \end{cases} \quad (1)$$

其中, $S(x, t)$, $I(x, t)$, $Q(x, t)$ 和 $R(x, t)$ 分别表示易感设备、感染设备、隔离设备和恢复设备在时间 t 和空间 x 处的数量。 $d_i > 0 (i = 1, 2, 3, 4)$ 表示各状态设备的空间扩散系数, $\Delta = \partial^2/\partial x^2$ 为一维空间的拉普拉斯算子。

由于模型(1)中的前三个等式与状态 R 无关,可将其简化为以下模型

$$\begin{cases} \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = d_1 \Delta S(x,t) + \Lambda - \frac{\beta S(x,t)I(x,t-\tau_1)}{1+\alpha I(x,t-\tau_1)} - hS(x,t) - \mu S(x,t) \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = d_2 \Delta I(x,t) + \frac{\beta S(x,t)I(x,t-\tau_1)}{1+\alpha I(x,t-\tau_1)} - \theta I(x,t-\tau_2) - \frac{\eta I(x,t)}{1+\sigma I(x,t)} - mI(x,t) - \mu I(x,t) \\ \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = d_3 \Delta Q(x,t) + \theta I(x,t-\tau_2) - \frac{\varphi Q(x,t)}{1+\sigma I(x,t)} - nQ(x,t) - \mu Q(x,t) \end{cases} \quad (2)$$

初始条件为

$$\begin{cases} S(x,t) = S_0(x,t) \geq 0, (x,t) \in \bar{\Omega} \times [-\max\{\tau_1, \tau_2\}, 0] \\ I(x,t) = I_0(x,t) \geq 0, (x,t) \in \bar{\Omega} \times [-\max\{\tau_1, \tau_2\}, 0] \\ Q(x,t) = Q_0(x,t) \geq 0, (x,t) \in \bar{\Omega} \times [-\max\{\tau_1, \tau_2\}, 0] \end{cases}$$

且满足 Neumann 边界条件

$$\frac{\partial S(x,t)}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial I(x,t)}{\partial \vec{v}} = \frac{\partial Q(x,t)}{\partial \vec{v}} = 0, t > 0, x \in \partial\Omega$$

其中, $\partial\Omega$ 为一维空间 Ω 的光滑边界, \vec{v} 为 $\partial\Omega$ 的外法向量。

令模型(2)右端等式为0, 得到无恶意软件平衡点 $E^0 = (\Lambda/(h+\mu), 0, 0)$, 基本再生数 $R_0 = \beta\Lambda/[(\mu+h)(\mu+\eta+\theta+m)]$. R_0 是衡量恶意软件传播能力的关键参数。当 $R_0 > 1$ 时, 恶意软件将会在 IoT 系统中持续传播。当 $R_0 < 1$ 时, 恶意软件则会逐渐消失。由于 $R_0 > 1$ 更符合恶意软件的实际传播过程, 因此只讨论当 $R_0 > 1$ 时, 恶意软件在 IoT 系统中的时空动态传播特性。

当 $R_0 > 1$ 时, 模型(2)有唯一正解, 即存在唯一恶意软件传播平衡点 $E^* = (S^*, I^*, Q^*)$, 其中

$$S^* = \frac{\Lambda(1+\alpha I^*)}{\beta I^* + (h+\mu)(1+\alpha I^*)}, Q^* = \frac{\theta I^*(1+\sigma I^*)}{(n+\mu)(1+\sigma I^*) + \varphi}$$

I^* 可由下列等式给出

$$S_0 I^2 + S_1 I + S_2 = 0 \quad (3)$$

其中

$$\begin{aligned} S_0 &= -[\beta + (h+\mu)\alpha](\mu+\theta+m)\sigma \\ S_1 &= \beta(\Lambda\sigma - \mu - \theta - \eta - m) - (\mu+h)((\mu+\theta+m)(\sigma+\alpha) + \eta\alpha) \\ S_2 &= \beta\Lambda - (\mu+h)(\mu+\theta+\eta+m) \end{aligned}$$

为了有效控制恶意软件在系统中的传播, 在模型(2)第二个等式中引入 PD 控制器

$$M(x,t) = k_p e(x,t) + k_d \frac{\partial e(x,t)}{\partial t} \quad (4)$$

其中, $e(x,t) = I(x,t) - I^*$, k_p 和 k_d 分别为比例项和微分项系数, 将其代入模型(2), 整理得

$$\begin{cases} \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = d_1 \Delta S(x,t) + \Lambda - \frac{\beta S(x,t)I(x,t-\tau_1)}{1+\alpha I(x,t-\tau_1)} - hS(x,t) - \mu S(x,t) \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = \frac{1}{1-k_d} (d_2 \Delta I(x,t) + \frac{\beta S(x,t)I(x,t-\tau_1)}{1+\alpha I(x,t-\tau_1)} - \theta I(x,t-\tau_2) \\ \quad - \frac{\eta I(x,t)}{1+\sigma I(x,t)} - mI(x,t) - \mu I(x,t) + k_p(I-I^*)) \\ \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = d_3 \Delta Q(x,t) + \theta I(x,t-\tau_2) - \frac{\varphi Q(x,t)}{1+\sigma I(x,t)} - nQ(x,t) - \mu Q(x,t) \end{cases} \quad (5)$$

PD 控制器 $M(x,t)$ 的引入不会改变模型(2)的平衡点 E^* 和基本再生数 R_0 , 即 PD 控制能够在保持原模型性质的同时实现对模型动力学行为的控制。

2 稳定性分析

令 $\tilde{S}(x,t) = S(x,t) - S^*$, $\tilde{I}(x,t) = I(x,t) - I^*$, $\tilde{Q}(x,t) = Q(x,t) - Q^*$, 通过坐标变换将平衡点 E^* 转化到原点, 则模型(5)在平衡点 E^* 处的线性化形式为

$$\begin{cases} \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} = d_1 \Delta S(x,t) + a_{11} S(x,t) + b_{12} I(x,t - \tau_1) \\ \frac{\partial I(x,t)}{\partial t} = d_2 \Delta I(x,t) + \frac{1}{1 - k_d} (a_{21} S(x,t) + (a_{22} + k_p) I(x,t) + b_{22} I(x,t - \tau_1) + c_{22} I(x,t - \tau_2)) \\ \frac{\partial Q(x,t)}{\partial t} = d_3 \Delta Q(x,t) + a_{32} I(x,t) + c_{32} I(x,t - \tau_2) + a_{33} Q(x,t) \end{cases} \quad (6)$$

其中

$$\begin{aligned} a_{11} &= -\frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*} - \mu - h, a_{21} = \frac{\beta I^*}{1 + \alpha I^*}, a_{22} = -\mu - m - \frac{\eta}{(1 + \sigma I^*)^2}, a_{32} = \frac{\sigma \varphi Q^*}{(1 + \sigma I^*)^2}, \\ a_{33} &= -\frac{\varphi}{1 + \sigma I^*} - \mu - n, b_{22} = -b_{12} = \frac{\beta S^*}{(1 + \alpha I^*)^2}, c_{32} = -c_{22} = \theta \end{aligned}$$

根据文献[14],定义 $-k^2(k \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \dots\})$ 为一维空间 Ω 中具有Neumann边界条件的 Δ 的特征值,可得系统(6)的特征方程为

$$\lambda^3 + A_1(k)\lambda^2 + A_2(k)\lambda + A_3(k) + e^{-\lambda\tau} [B_1(k)\lambda^2 + B_2(k)\lambda + B_3(k)] = 0 \quad (7)$$

其中

$$\begin{aligned} A_1(k) &= -a_{11} - a_{33} - \frac{a_{22} + k_p}{1 - k_d} + k^2(d_1 + d_2 + d_3) \\ A_2(k) &= k^4(d_1 d_2 + d_1 d_3 + d_2 d_3) + k^2 \left[-a_{33} d_1 - (a_{11} + a_{33}) d_2 - a_{11} d_3 - \frac{(a_{22} + k_p)(d_1 + d_3)}{1 - k_d} \right] \\ &\quad + a_{11} a_{33} + \frac{(a_{11} + a_{33})(a_{22} + k_p)}{1 - k_d} \\ A_3(k) &= k^6 d_1 d_2 d_3 + k^4 \left[-a_{33} d_1 d_2 - a_{11} d_2 d_3 - \frac{d_1 d_3 (a_{22} + k_p)}{1 - k_d} \right] \\ &\quad + k^2 \left[a_{11} a_{33} d_2 + \frac{(a_{33} d_1 + a_{11} d_3)(a_{22} + k_p)}{1 - k_d} \right] - \frac{a_{11} a_{33} (a_{22} + k_p)}{1 - k_d} \\ B_1(k) &= -\frac{b_{22} + c_{22}}{1 - k_d} \\ B_2(k) &= \frac{(a_{11} + a_{33})(b_{22} + c_{22}) - a_{21} b_{12}}{1 - k_d} - k^2 \left[\frac{(b_{22} + c_{22})(d_1 + d_3)}{1 - k_d} \right] \\ B_3(k) &= -k^4 \frac{(b_{22} + c_{22}) d_1 d_3}{1 - k_d} + k^2 \left[\frac{a_{33} (b_{22} + c_{22}) d_1}{1 - k_d} + \frac{(a_{11} (b_{22} + c_{22}) - a_{21} b_{12}) d_3}{1 - k_d} \right] \\ &\quad + \frac{a_{33} (a_{21} b_{12} - a_{11} (b_{22} + c_{22}))}{1 - k_d} \end{aligned}$$

2.1 Turing不稳定

本节将重点分析扩散因子对无时滞模型稳定性的影响.令 $\tau_1 = \tau_2 = 0$,特征方程(7)可写为以下形式

$$\lambda^3 + [A_1(k) + B_1]\lambda^2 + [A_2(k) + B_2(k)]\lambda + A_3(k) + B_3(k) = 0 \quad (8)$$

现做以下假设:

$$\begin{aligned} (H_1): & -a_{22} - (b_{22} + c_{22}) - a_{11} > 0, a_{11}(b_{22} + c_{22} + a_{22}) - a_{21} b_{12} > 0 \\ (H_2): & [d_1(a_{22} + b_{22} + c_{22}) + a_{11} d_2]^2 - 4d_1 d_2 [a_{11}(b_{22} + c_{22} + a_{22}) - a_{21} b_{12}] > (d_1 d_2)^2 > 0 \\ (H_3): & -d_1(a_{22} + b_{22} + c_{22}) - a_{11} d_2 < 0, d_1 \neq d_2 \\ (H_4): & \frac{a_{22} + k_p + b_{22} + c_{22}}{1 - k_d} + a_{11} < 0, \frac{(a_{22} + k_p + b_{22} + c_{22})a_{11} - a_{21} b_{12}}{1 - k_d} > 0 \\ (H_5): & \left[\frac{(a_{22} + k_p + b_{22} + c_{22})d_1}{1 - k_d} + a_{11} d_2 \right]^2 - 4d_1 d_2 \frac{(a_{22} + k_p + b_{22} + c_{22})a_{11} - a_{21} b_{12}}{1 - k_d} < 0 \end{aligned}$$

2.1.1 不考虑PD控制($k_p=0, k_d=0$)

定理1 若 $\tau_1 = \tau_2 = 0$ 且 $k_p = 0, k_d = 0$,当条件 $(H_1) \sim (H_3)$ 成立时,关于系统(5),有以下结论成立:

- (1)当不存在扩散因子时($d_i = 0$),系统(5)在恶意软件传播平衡点 E^* 处局部渐近稳定;
 (2)当存在扩散因子时($d_i > 0$),系统(5)在恶意软件传播平衡点 E^* 处 Turing 不稳定。

证明 (1)当 $d_i = 0$ 且 $k_p = 0, k_d = 0$ 时,特征方程(8)可表示为以下形式

$$(\lambda - a_{33})(\lambda^2 + W_{10}\lambda + W_{20}) = 0 \quad (9)$$

其中

$$W_{10} = -a_{22} - (b_{22} + c_{22}) - a_{11}, W_{20} = a_{11}(b_{22} + c_{22} + a_{22}) - a_{21}b_{12}$$

由于 $\lambda_{10} = a_{33} < 0$,故只需对方程 $\lambda^2 + W_{10}\lambda + W_{20} = 0$ 根的分布情况进行讨论。

若条件(H_1)成立,有 $W_{10} > 0, W_{20} > 0$,根据 Routh-Hurwitz 判据,可以确定方程(9)特征根的实部均为负。因此,系统(5)在平衡点 E^* 处局部渐近稳定。

(2)当 $d_i > 0$ 且 $k_p = 0, k_d = 0$ 时,方程(8)可写为以下形式

$$(\lambda + k^2d_3 - a_{33})(\lambda^2 + W_{1k}\lambda + W_{2k}) = 0 \quad (10)$$

其中

$$W_{1k} = k^2(d_1 + d_2) - a_{22} - (b_{22} + c_{22}) - a_{11} > W_{10} > 0$$

$$W_{2k} = k^4d_1d_2 - k^2[d_1(a_{22} + b_{22} + c_{22}) + a_{11}d_2] + a_{11}(b_{22} + c_{22} + a_{22}) - a_{21}b_{12}$$

容易得出, $\lambda_{1k} = a_{33} - k^2d_3 < 0$,只需对方程 $\lambda^2 + W_{1k}\lambda + W_{2k} = 0$ 进行讨论。

令 $u = k^2 > 0$,定义

$$f(u) = d_1d_2u^2 - [d_1(a_{22} + b_{22} + c_{22}) + a_{11}d_2]u + a_{11}(a_{22} + b_{22} + c_{22}) - a_{21}b_{12}$$

当条件(H_1)~(H_3)成立时

$$u_1 + u_2 = \frac{d_1(a_{22} + b_{22} + c_{22}) + a_{11}d_2}{d_1d_2} > 0$$

$$u_1u_2 = \frac{a_{11}(a_{22} + b_{22} + c_{22}) - a_{21}b_{12}}{d_1d_2} > 0$$

因此方程 $f(u) = 0$ 存在两个正根 $u_1, u_2 (u_2 > u_1)$ 。由 $(u_1 + u_2)^2 - 4u_1u_2 > 1$ 可得 $|u_2 - u_1| > 1$,即存在一个正整数 $k_0 \in (u_1, u_2)$,使得 $f(u) = f(k_0^2) = W_{2k_0} < 0$ 。依据 Descartes 符号规则,方程(10)至少存在一个正实根。综上所述,系统(5)在平衡点 E^* 处经历 Turing 不稳定。

2.1.2 考虑 PD 控制($k_p \neq 0, k_d \neq 0$)

定理 2 $\tau_1 = \tau_2 = 0, d_i \geq 0 (i = 1, 2, 3)$ 且 $k_p \neq 0, k_d \neq 0$,当条件(H_4)和(H_5)成立时,系统(5)在恶意软件传播平衡点 E^* 处局部渐近稳定。

证明 (1)当 $d_i = 0$ 且 $k_p \neq 0, k_d \neq 0$ 时,方程(8)可写为以下形式

$$(\lambda - a_{33})(\lambda^2 + M_1\lambda + M_2) = 0 \quad (11)$$

其中

$$M_1 = -\frac{a_{22} + k_p + b_{22} + c_{22}}{1 - k_d} - a_{11}$$

$$M_2 = \frac{(a_{22} + k_p + b_{22} + c_{22})a_{11} - a_{21}b_{12}}{1 - k_d}$$

当条件(H_4)成立时,根据 Routh-Hurwitz 判据,可确定方程(11)特征根的实部均为负。因此,当 $d_i = 0$ 时,受控模型(5)在平衡点 E^* 处局部渐近稳定。

(2)当 $d_i > 0$ 且 $k_p \neq 0, k_d \neq 0$ 时,特征方程(8)变为

$$(\lambda + k^2d_3 - a_{33})[\lambda^2 + C_1(k)\lambda + C_2(k)] = 0 \quad (12)$$

其中

$$C_1(k) = k^2(d_1 + d_2) - \frac{a_{22} + k_p + b_{22} + c_{22}}{1 - k_d} - a_{11}$$

$$C_2(k) = k^4d_1d_2 - k^2\left[\frac{(a_{22} + k_p + b_{22} + c_{22})d_1}{1 - k_d} + a_{11}d_2\right] + \frac{(a_{22} + k_p + b_{22} + c_{22})a_{11} - a_{21}b_{12}}{1 - k_d}$$

若(H_4)和(H_5)成立, $C_1(k) > 0, C_2(0) > 0$ 。令 $u = k^2 > 0$,定义

$$r(u) = d_1 d_2 u^2 - \left[\frac{(a_{22} + k_p + b_{22} + c_{22})d_1}{1 - k_d} + a_{11}d_2 \right] u + \frac{(a_{22} + k_p + b_{22} + c_{22})a_{11} - a_{21}b_{12}}{1 - k_d}$$

当条件(H_4)成立时,方程 $r(u) = 0$ 无解,函数 $r(u)$ 的图像与坐标轴 u 无交点,对于 $\forall k > 0$,都有 $r(u) = C_2(u) > 0$. 根据Routh-Hurwitz判据,可确定方程(12)特征根的实部均为负。因此,受控模型(5)在平衡点 E^* 处局部渐近稳定,即PD控制可以使出现Turing不稳定的系统重新回到稳定状态。

2.2 Hopf分岔

本节重点讨论时滞对模型稳定性的影响,令 $\tau_1 = \tau_2 = \tau$,以 τ 为分岔参数,讨论模型出现Hopf分岔的条件。

设 $\lambda = i\omega (\omega > 0)$ 是方程(7)的一个特征根,将其代入可得

$$-i\omega^3 - \omega^2 A_1(k) + i\omega A_2(k) + A_3(k) + (\cos \omega\tau - i \sin \omega\tau)[- \omega^2 B_1 + i\omega B_2(k) + B_3(k)] = 0$$

分离上述等式实、虚部

$$\begin{cases} [B_3(k) - \omega^2 B_1] \cos \omega\tau + \omega B_2(k) \sin \omega\tau = \omega^2 A_1(k) - A_3(k) \\ \omega B_2(k) \cos \omega\tau + [\omega^2 B_1 - B_3(k)] \sin \omega\tau = \omega^3 - \omega A_2(k) \end{cases} \quad (13)$$

式(13)两边平方相加后,可得

$$\omega^6 + \omega^4[A_1(k)^2 - 2A_2(k) - B_1^2] + \omega^2[A_2(k)^2 - 2A_1(k)A_3(k) + 2B_1B_3(k) - B_2(k)^2] + A_3(k)^2 - B_3(k)^2 = 0 \quad (14)$$

令 $Z = \omega^2$,有

$$Z^3 + g_1(k)Z^2 + g_2(k)Z + g_3(k) = 0 \quad (15)$$

其中

$$\begin{aligned} g_1(k) &= A_1(k)^2 - 2A_2(k) - B_1^2 \\ g_2(k) &= A_2(k)^2 - 2A_1(k)A_3(k) + 2B_1B_3(k) - B_2(k)^2 \\ g_3(k) &= A_3(k)^2 - B_3(k)^2 \end{aligned}$$

提出以下假设条件

$$(H_6): g_3(k) = A_3(k)^2 - B_3(k)^2 < 0$$

$$(H_7): P_1N_1 + P_2N_2 > 0$$

当条件(H_6)成立时,存在 $K^* \in \mathbb{N}_0$. 当 $k > K^*$ 时,等式(15)无正根。当 $0 \leq k \leq K^*$ 时,等式(15)至少存在一个正根 Z_k ,即等式(14)至少存在一个正根 $\omega_k = \sqrt{Z_k}$,特征方程(7)存在纯虚根 $\lambda = i\omega_k$,由式(13)可得

$$\cos(\omega_k\tau) = \frac{G_1 - G_2}{V_1^2 + V_2^2} \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} V_1 &= \omega_k^2 B_1 - B_3(k), V_2 = \omega_k B_2(k) \\ G_1 &= [\omega_k^2 B_1 - B_3(k)][\omega_k^2 A_1(k) - A_3(k)], G_2 = \omega_k^2 B_2(k)[\omega_k^2 - A_2(k)] \end{aligned}$$

且

$$\tau_k^{(\ell)} = \frac{1}{\omega_k} \left[\arccos \left(\frac{G_1 - G_2}{V_1^2 + V_2^2} \right) + 2\ell\pi \right] \quad (17)$$

其中, $0 \leq k \leq K^*$, $\ell = 0, 1, 2, \dots$. 由于 $\tau_k^{(\ell+1)} > \tau_k^{(\ell)}$,定义

$$\tau^* = \tau_{k_0}^0 = \min \{ \tau_k^{(\ell)}, 0 \leq k \leq K^*, \ell \in \mathbb{N}_0 \} \quad (18)$$

接下来,对 $0 \leq k \leq K^*$ 时的穿越条件进行验证,方程(7)两边关于 τ 求导,得到

$$\left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} = \frac{e^{\lambda\tau} [3\lambda^2 + 2A_1(k)\lambda + A_2(k)] + 2B_1\lambda + B_2(k)}{\lambda [B_1\lambda^2 + B_2(k)\lambda + B_3(k)]} - \frac{\tau}{\lambda}$$

计算得到

$$\operatorname{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_k^{(\ell)}} = \frac{P_1N_1 + P_2N_2}{N_1^2 + N_2^2}$$

其中

$$\begin{aligned} N_1 &= \omega_k^2 B_2(k), N_2 = \omega_k B_3(k) - B_1 \omega_k^3 \\ P_1 &= [3\omega_k^2 - A_2(k)] \cos \omega_k \tau + 2A_1(k) \omega_k \sin \omega_k \tau - B_2(k) - \tau \omega_k^2 B_1 + \tau B_3(k) \\ P_2 &= -2A_1(k) \omega_k \cos \omega_k \tau + [3\omega_k^2 - A_2(k)] \sin \omega_k \tau - 2B_1 \omega_k + \tau B_2(k) \omega_k \end{aligned}$$

由于

$$\text{sign} \left\{ \text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right) \Big|_{\tau=\tau_k^{(i)}} \right\} = \text{sign} \left\{ \text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right)^{-1} \Big|_{\tau=\tau_k^{(i)}} \right\}$$

因此,当条件 (H_7) 成立时,满足穿越条件 $\text{Re} \left(\frac{d\lambda}{d\tau} \right) \Big|_{\tau=\tau_k^{(i)}} > 0$,此时系统(5)在平衡点 E^* 处出现Hopf分岔。

定理3 若 (H_6) 和 (H_7) 成立,有以下结论成立:

(1)当 $\tau \in [0, \tau^*)$ 时,系统(5)在恶意软件传播平衡点 E^* 处局部渐近稳定。当 $\tau > \tau^*$ 时,系统(5)在恶意软件传播平衡点 E^* 处不稳定;

(2)当 $\tau = \tau_k^{(i)} (0 \leq k \leq K^*, i \in \mathbb{N}_0)$ 时,系统(5)在恶意软件传播平衡点 E^* 处经历Hopf分岔。其中, τ^* 为出现Hopf分岔的最小阈值。

3 数值模拟

本节将通过数值模拟验证上述得出结论的正确性以及PD控制对于Turing不稳定和Hopf分岔的控制效果。

3.1 Turing不稳定的控制

设模型参数 $\Lambda = 0.5, \beta = 0.2, \alpha = 0.1, \mu = 0.05, \eta = 0.4, \varphi = 0.1, \theta = 0.1, \sigma = 0.6, h = 0.02, m = 0.03, n = 0.03$,参数的选择满足条件 $(H_1) \sim (H_3)$ 。通过计算可得,基本再生数 $R_0 = 2.4631 > 1$,平衡点 $E^* = (2.4655, 0.71121, 0.47385)$ 。令初始条件 $S(x, 0) = 2.4655 + 0.7 \cos x, I(x, 0) = 0.71121 + 0.7 \cos x, Q(x, 0) = 0.47385 + 0.7 \cos x$ 。

3.1.1 不考虑PD控制($k_p = 0, k_d = 0$)

图2表明,当 $d_i = 0$ 时,系统随时间收敛到平衡点 E^* 。当 $d_1 = 0.425, d_2 = 0.001, d_3 = 0.01$ 时,由图3(a)可以看出,存在 $k_0 \in \mathbb{N}^+$,使得 $f(k_0^2) < 0$,满足Turing不稳定出现的条件。此时,系统(5)在平衡点 E^* 处出现Turing不稳定(图4),与定理1结论一致。

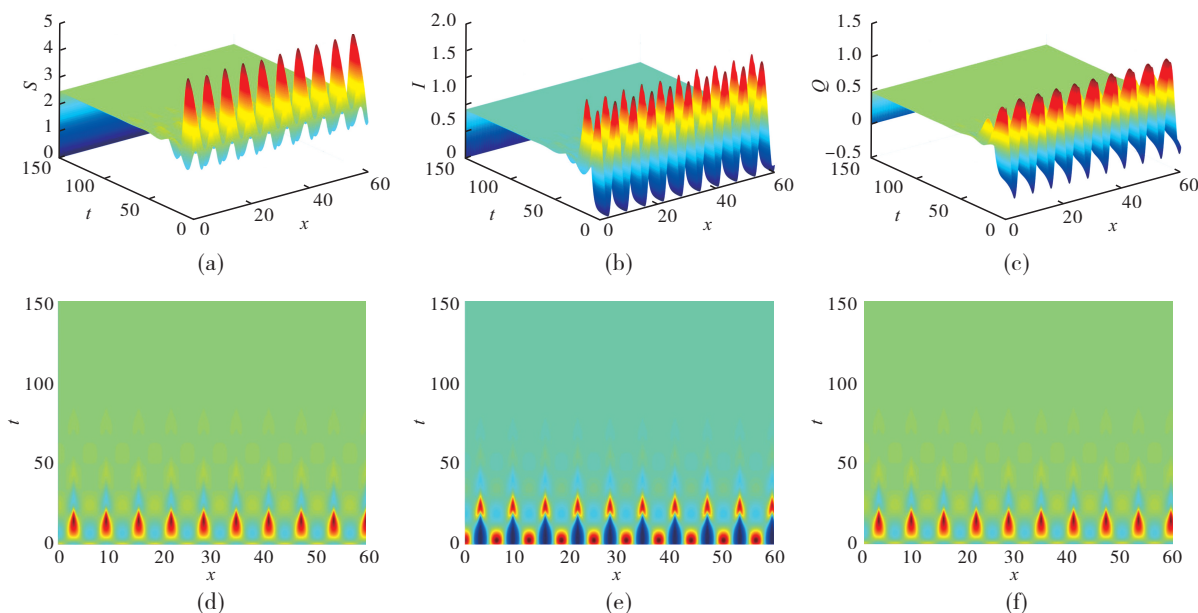


图2 当 $\tau_1 = \tau_2 = 0, k_p = 0, k_d = 0, d_i = 0 (i = 1, 2, 3)$ 时,系统(5)在平衡点 E^* 处局部渐近稳定

3.1.2 考虑PD控制($k_p \neq 0, k_d \neq 0$)

令 $k_p = -0.2, k_d = 0.2$, 其他参数与图4参数保持一致且满足条件(H_4)和(H_5), 系统(5)在PD控制的作用下趋于稳定状态(图5)。由此可见, PD控制对于由扩散因子引起的Turing不稳定具有良好控制效果。

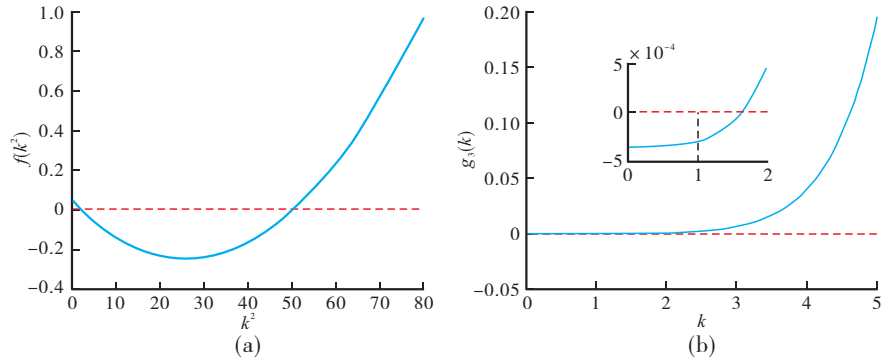


图3 $f(k^2)$ 和 $g(k)$ 的函数

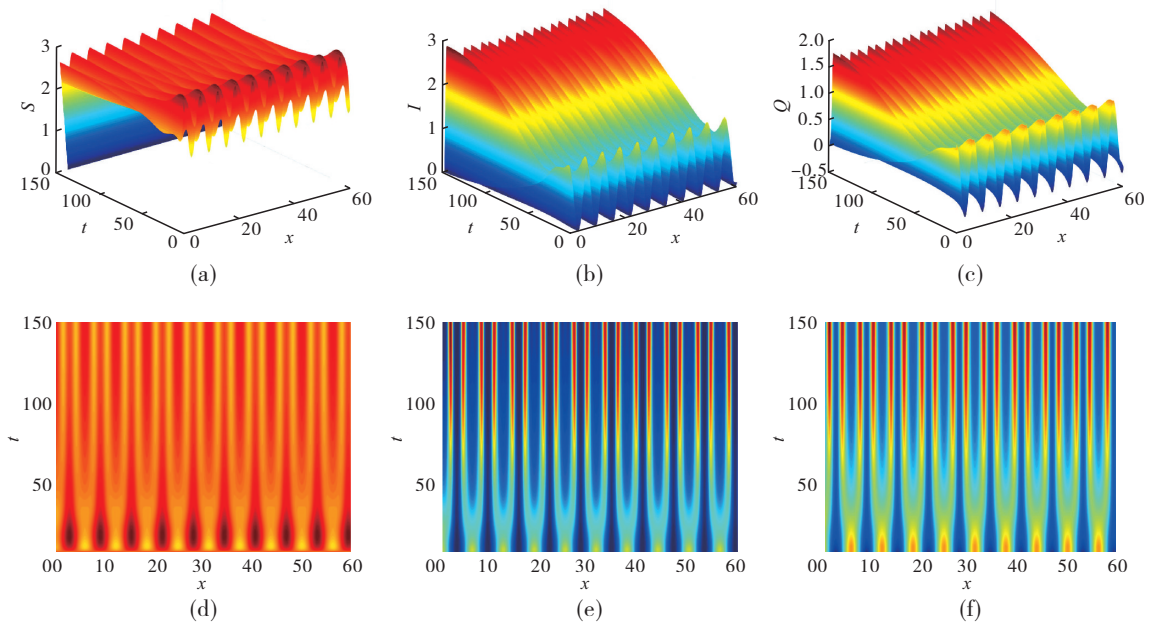


图4 当 $\tau_1 = \tau_2 = 0, k_p = 0, k_d = 0, d_1 = 0.425, d_2 = 0.001, d_3 = 0.01$ 时, 系统(5)在平衡点 E^* 处 Turing 不稳定

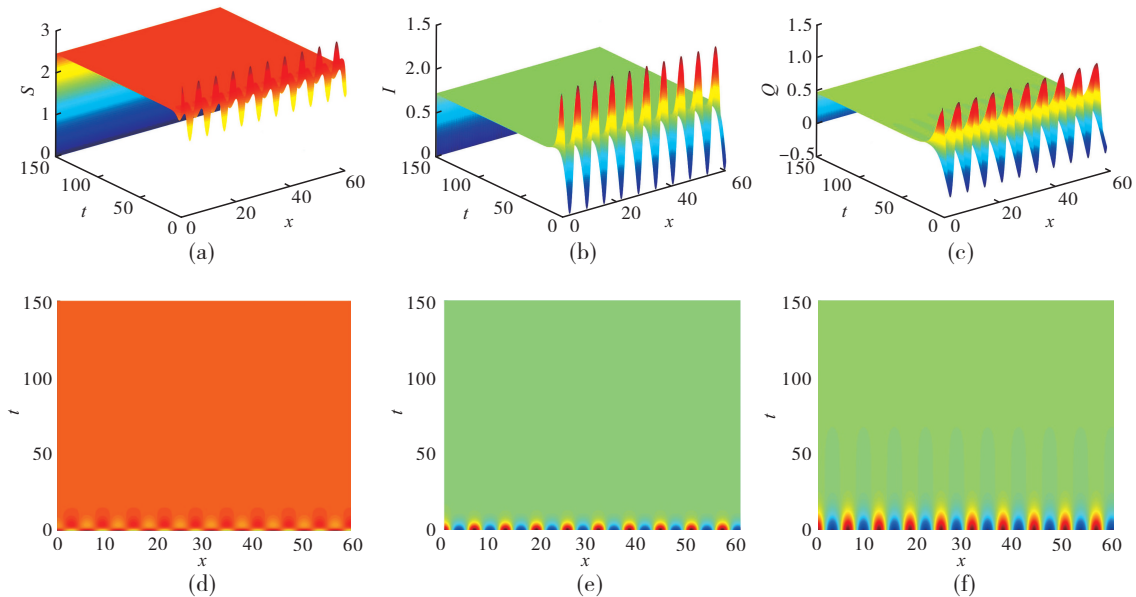


图5 当 $\tau_1 = \tau_2 = 0, k_p = -0.2, k_d = 0.2, d_1 = 0.425, d_2 = 0.001, d_3 = 0.01$ 时, 系统(5)在平衡点 E^* 处局部渐近稳定

3.2 Hopf分岔的控制

设模型参数 $\Lambda = 0.8, \beta = 0.38, \mu = 0.05, \eta = 0.1, \alpha = 0.1, \varphi = 0.1, \theta = 0.3, \sigma = 0.5, h = 0.02, m = 0.03, n = 0.03, d_1 = 0.01, d_2 = 0.05, d_3 = 0.01$, 参数的选择满足条件 (H_6) 和 (H_7) . 计算得到, 平衡点 $E^* = (1.3312, 1.6242, 3.6043)$, 基本再生数 $R_0 = 9.0746 > 1$. 令初始条件为 $S(x, 0) = 1.3312 + 0.2 \sin x, I(x, 0) = 1.6242 + 0.2 \sin x, Q(x, 0) = 3.6043 + 0.2 \sin x$.

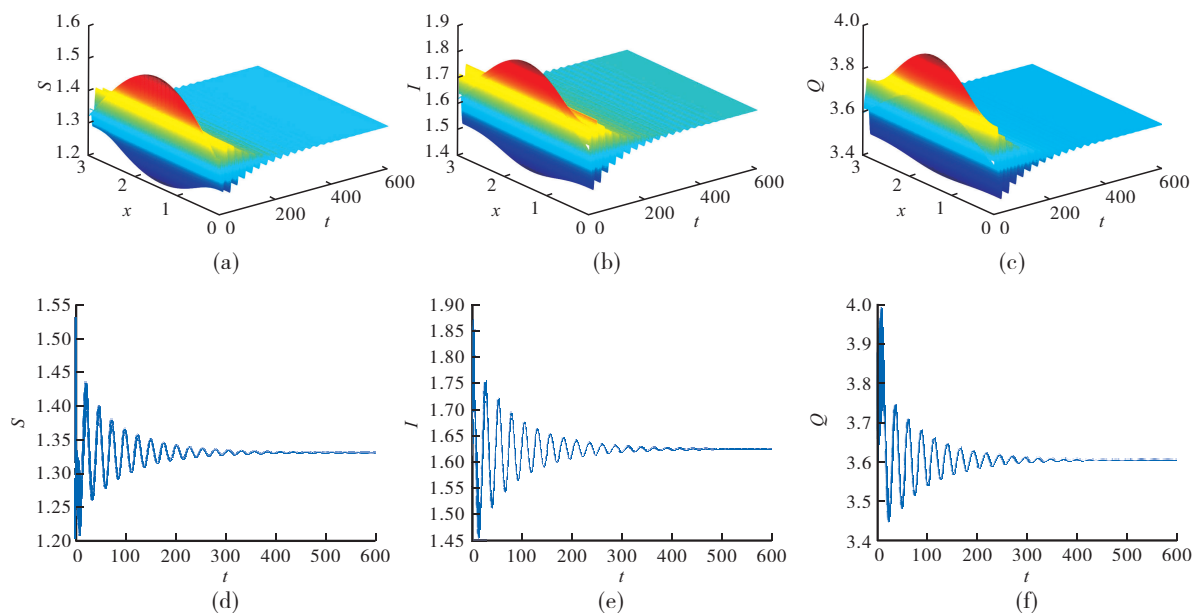


图6 当 $k_p=0, k_d=0, \tau=6 < \tau^*$ 时, 系统(5)在平衡点 E^* 处局部渐近稳定

3.2.1 不考虑PD控制 ($k_p = 0, k_d = 0$)

由图 3(b)可以看出, 当 $k = 0$ 或 $k = 1$ 时, $g_3(k) < 0$ 成立, 等式(14)至少存在一个正根。根据式(15)和式(17), 计算得到 $\omega_0^0 = 0.216, \omega_1^0 = 0.1806, \tau_0^0 = 7.3822, \tau_1^0 = 10.6443$, 因此 $\tau^* = \tau_0^0 = 7.3822$. 图6表明, 当 $\tau = 6 < \tau^*$ 时, 系统(5)随着时间的演化趋于稳定。当 $\tau = 7.5 > \tau^*$ 时, 系统(5)在平衡点 E^* 处不稳定性, 出现Hopf分岔, 产生空间振荡(图7), 这与定理3的结论一致。

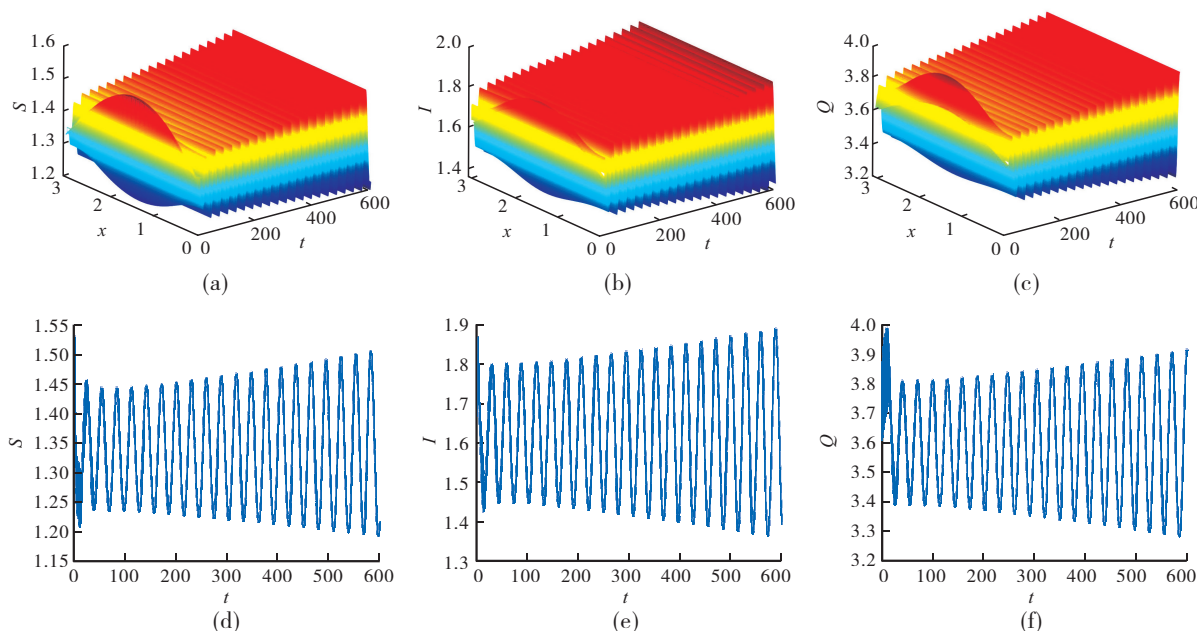


图7 当 $k_p=0, k_d=0, \tau=7.5 > \tau^*$ 时, 系统(5)在平衡点 E^* 处出现Hopf分岔

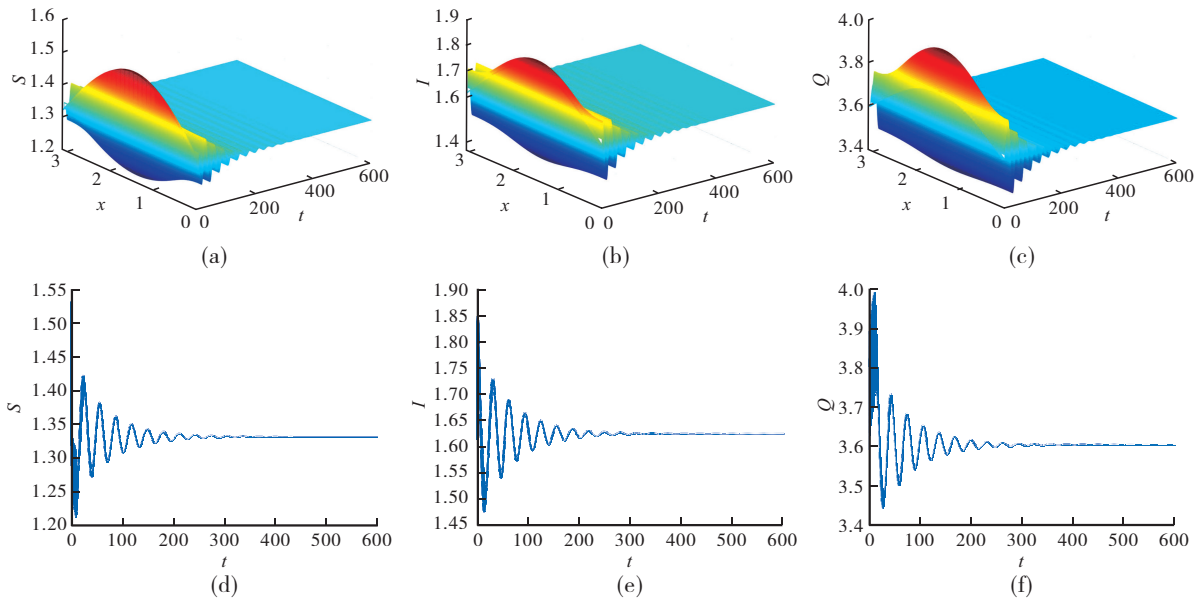


图8 当 $k_p = -0.01, k_d = -0.3, \tau = 7.5$ 时,系统(5)在平衡点 E^* 处局部渐近稳定

3.2.2 考虑PD控制($k_p \neq 0, k_d \neq 0$)

令 $k_p = -0.01, k_d = -0.3$,其他参数不变且满足条件(H_6)和(H_7).通过计算发现,分岔阈值 $\tau_c^* = 10.3701 > \tau^*$.如图8所示,当 $\tau = 7.5$ 时,在PD控制的作用下,原本不稳定的模型逐渐趋于稳定状态.

3.2.3 控制参数对分岔阈值的影响

通过分别固定参数 k_p 和 k_d ,分析 k_d 和 k_p 的变化对分岔阈值 τ^* 的影响(图9).如图9(a)所示,当 $k_p = -0.01$ 时,随着 k_d 的增大,分岔阈值 τ^* 逐渐减小,系统的稳定区域减小.当 $k_d = -0.3$ 时,随着 k_p 的增大,分岔阈值 τ^* 逐渐减小,系统的稳定区域减小(图9(b)).由此可知,PD控制可以通过调节控制参数 k_p 和 k_d ,改变分岔阈值 τ^* 的大小,实现系统Hopf分岔的提前或延迟.

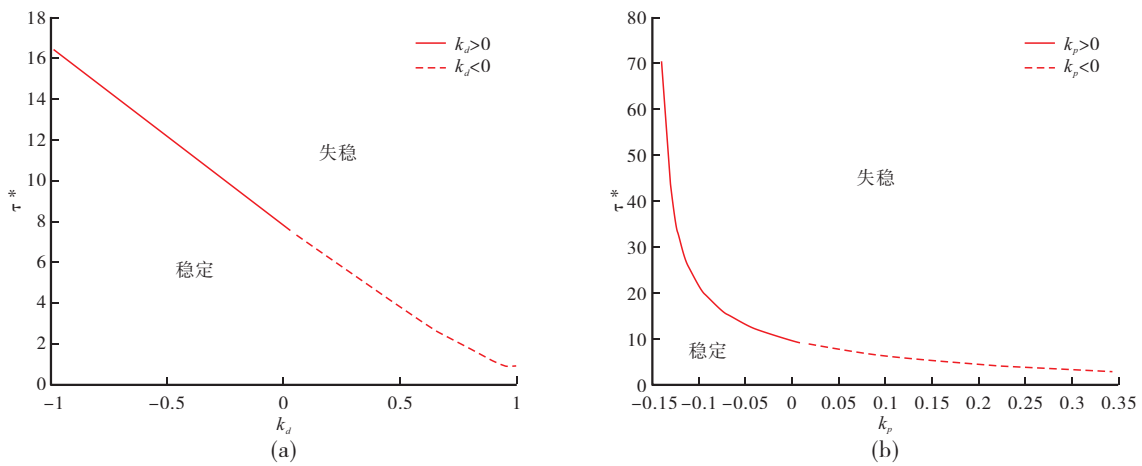


图9 控制参数 k_d 和 k_p 的变化对分岔阈值 τ^* 的影响

4 结论

为探究恶意软件在IoT系统中的时空动态传播特性,文章建立了一类考虑有限治疗资源的SIQR时滞扩散恶意软件传播模型,并采用非线性饱和治疗函数描述治疗资源的有限性.同时,为了调节模型的动态行为,避免恶意软件的大规模爆发,在模型中引入PD控制器.首先,在不考虑时滞的情况下,讨论扩散因子对模型稳定性的影响,给出Turing不稳定发生的条件,发现PD控制对于Turing不稳定具有一定的抑制效果.另外,以时滞为分岔参数,推导出出现Hopf分岔的临界条件和分岔阈值表达式.当时滞小于分岔阈值时,模型在平衡点 E^* 处局部渐近稳定.当时滞大于分岔阈值时,模型将会失去稳定性,产生空间振荡.PD控制可以通过改变分岔阈值的大小,延后或提前Hopf分岔的发生.

参考文献:

- [1] MAKHDOOM I, ABOLHASAN M, LIPMAN J, et al. Anatomy of Threats to the Internet of Things [J]. IEEE Communications Surveys & Tutorials, 2019, 21(02): 1636–1675.
- [2] SHA K, WEI W, ANDREW YANG T, et al. On Security Challenges and Open Issues in Internet of Things [J]. Future Generation Computer Systems, 2018, 83: 326–337.
- [3] ZHU Q, YANG X, REN J. Modeling and Analysis of the Spread of Computer Virus [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2012, 17(12): 5117–5124.
- [4] CHEN L, SUN J. Global Stability and Optimal Control of an SIRS Epidemic Model on Heterogeneous Networks [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2014, 410: 196–204.
- [5] DONG T, WANG A, LIAO X. Impact of Discontinuous Antivirus Strategy in a Computer Virus Model with the Point to Group [J]. Applied Mathematical Modelling, 2016, 40(04): 3400–3409.
- [6] HERNÁNDEZ GUILLÉN J D, MARTÍN DEL REY A, HERNÁNDEZ ENCINAS L. Study of the Stability of a SIRS Model for Computer Worm Propagation [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2017, 479: 411–421.
- [7] GAO Q, ZHUANG J. Stability Analysis and Control Strategies for Worm Attack in Mobile Networks Via a VEIQS Propagation Model [J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 368: 124584.
- [8] YU Z, GAO H, WANG D, et al. SEI2RS Malware Propagation Model Considering Two Infection Rates in Cyber-physical Systems [J]. Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 2022, 597: 127207.
- [9] 王彬, 王晓云. 具有非线性传染率和时滞的随机 SIQR 计算机病毒模型的渐近行为 [J]. 数学的实践与认识, 2020, 50(06): 171–181.
- [10] YU X, WAN A. Dynamical Aspects of a Delayed SEI2RS Malware Dissemination Model in Cyber-physical Systems [J]. Results in Physics, 2022, 40: 105851.
- [11] 杨芳芳, 张子振. 具有混合隔离策略的非线性计算机病毒传播模型的 Hopf 分岔研究 [J]. 浙江大学学报(理学版), 2022, 49(05): 570–579.
- [12] 张晓潘, 袁凌云. 具有时滞-扩散作用的无线传感网络病毒传播模型的振荡动力学研究 [J]. 计算机科学, 2017, 44(S1): 390–394.
- [13] 庄乾辉, 肖敏, 王赫, 等. 时滞和扩散驱动下信息物理融合系统恶意病毒传播动力学 [J]. 控制理论与应用, 2022, 39(08): 1407–1416.
- [14] XIAO M, CHEN S, ZHENG W X, et al. Tipping Point Prediction and Mechanism Analysis of Malware Spreading in Cyber-physical Systems [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2023, 122: 107247.
- [15] KUMARI S, UPADHYAY R K. Exploring the Behavior of Malware Propagation on Mobile Wireless Sensor Networks: Stability and Control Analysis [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2021, 190: 246–269.
- [16] DU B, WANG H. Partial Differential Equation Modeling of Malware Propagation in Social Networks with Mixed Delays [J]. Computers & Mathematics with Applications, 2018, 75(10): 3537–3548.
- [17] JIANG X, CHEN X, CHI M, et al. On Hopf Bifurcation and Control for a Delay Systems [J]. Applied Mathematics and Computation, 2020, 370: 124906.
- [18] ZHU L, ZHAO H, WANG X. Bifurcation Analysis of a Delay Reaction-diffusion Malware Propagation Model with Feedback Control [J]. Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation, 2015, 22(01): 747–768.
- [19] LUAN Y, XIAO M, WANG Z, et al. Hybrid Control of Turing Instability and Hopf bifurcation in CDK1-APC Feedback Systems with Diffusion [J]. Journal of the Franklin Institute, 2023, 360(16): 12170–12197.
- [20] KASARAPU S, SHUKLA S, DINAKARRAO S M P. Resource- and Workload-aware Model Parallelism-inspired Novel Malware Detection for IoT Devices [J]. IEEE Transactions on Computer-aided Design of Integrated Circuits and Systems, 2023, 42(12): 4618–4628.
- [21] YANG W, LI D, CHANG X. Analysis and Numerical Simulation of Computer Virus Propagation Model based on Limited Resources [J]. Mathematics and Computers in Simulation, 2024, 223: 494–508.
- [22] ZHU P, XIAO M, HUANG X, et al. Spatiotemporal Dynamics Optimization of a Delayed Reaction-diffusion Mussel-algae Model based on PD Control Strategy [J]. Chaos, Solitons & Fractals, 2023, 173: 113751.

Variable Selection of Poisson Regression Model

ZHANG Wen-jing, DONG Cui-ling*

(School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi, Xinjiang, 830017, China)

Abstract: As a core tool for counting data, the accuracy of variable selection in the Poisson regression model directly affects the interpretability and prediction performance of the model. In this paper, R software is used to study the advantages and disadvantages of six variable selection methods in Poisson regression, including LASSO, Ridge regression, Elastic Net, SCAD, Bridge and Adaptive Bridge, through numerical simulation and empirical analysis of shared bicycle rental data. The results show that the SCAD method performs best in terms of model goodness of fit and prediction accuracy, and it is suitable for large samples and highly correlated data; The Adaptive Bridge method achieves a good balance between model complexity and prediction stability. This study provides a modeling tool with both accuracy and stability for the practical application of counting data.

Keywords: Generalized linear model; Poisson regression model; Variable selection methods; SCAD; Adaptive Bridge

(上接第101页)

A Delay-diffusion Malware Propagation Model with Limited Treatment Resources based on PD Control

GUO Jia¹, LI Ting^{1*}, WANG Huai-zhu²

(1.School of Mathematics and Statistics, Ningxia University, Yinchuan, Ningxia, 750021, China;
2.School of Advanced Interdisciplinary Studies, Ningxia University, Zhongwei, Ningxia, 755000, China)

Abstract: In order to investigate the spatial-temporal dynamic propagation characteristics of malware in the Internet of Things system, this paper establishes a delay-diffusion malware propagation model with limited treatment resources based on the theory of differential equations. By analyzing the relevant characteristic equations, the conditions for Turing instability and Hopf bifurcation are derived. To enhance the system stability, Proportional-Derivative (PD) control is introduced into the model, and the stability of the controlled model is analyzed. Numerical simulations confirm the correctness of the theoretical derivations and demonstrate that the occurrence of Turing instability and Hopf bifurcation can be controlled by choosing appropriate parameters of the PD controller.

Keywords: Internet of Things; Malware; Delay-diffusion; Limited treatment resources; PD control