

Hilfer 分数阶随机时滞微分方程的大偏差原理

陈娟, 顾海波*, 晏宇涛

(新疆师范大学 数学科学学院, 新疆 乌鲁木齐 830017)

摘要: 文章研究一类具有乘性噪声的 Hilfer 分数阶随机时滞微分方程的大偏差原理 (Large Deviation Principle, LDP)。基于大偏差原理与 Laplace 原理等价性, 利用弱收敛方法, 通过验证骨架方程的紧性及扰动系统的收敛性, 得到该类方程的 LDP。文章以金融市场模型为例, 通过数值模拟展示了如何利用 LDP 分析小噪声扰动下系统的渐近行为, 验证了理论结果。

关键词: 分数阶微积分; 随机微分方程; 大偏差原理; 弱收敛

中图分类号: O211.63

文献标识码: A

文章编号: 1008-9659(2026)04-0073-12

近年来, 分数阶微分方程在数学领域受到越来越多的关注。当传统整数阶模型难以捕捉复杂现象时, 分数阶微积分因能进行更细致的分析, 而在金融市场^[1]、环境科学^[2]和工程问题^[3]等领域得到了广泛应用。同时, 随机因素的引入使得模型能够更好地描述现实世界中的不确定性和复杂性。

大偏差原理 (Large Deviation Principle, LDP) 是目前研究的热点问题, 其主要探究尾 (偏差) 事件发生概率的指数型估计。尽管尾 (偏差) 事件发生的概率较小, 但其产生的影响可能很大。大偏差理论在概率论^[4]、信息论^[5]等诸多领域都有重要和深刻的应用。目前相关研究获得了非常丰富的研究结果。Dupuis 等人^[6]将随机控制技术与大偏差的概念相结合, 构造了一种弱收敛技术。Budhiraja 等人^[7]利用弱收敛方法研究一类由泊松随机测度驱动的随机偏微分方程的 LDP; Li^[8]研究了带跳跃的均值反射随机微分方程的 LDP; Haseena 等人^[9]研究具有多重随机性的随机积分微分方程的 LDP; Budhiraja 等人^[10]研究一类具有分数布朗噪声的随机动力系统的 LDP; Hong 等人^[11]研究一类受乘性噪声扰动的 McKean-Vlasov 拟线性随机发展方程的 LDP; Yang 等人^[12]对随机时滞微分方程的小时间建立 LDP; Wang 等人^[13]研究在局部弱单调性和 Lyapunov 条件的情形下随机微分方程的 LDP; Jin 等人^[14]研究系数满足超线性增长的情形下随机时滞微分方程的 LDP。

上述研究均集中于研究整数阶随机微分方程的 LDP, 而分数阶随机微分方程的大偏差研究有关文献较少。Suvinthra 等人^[15]研究非线性分数阶随机积分微分方程的 LDP; Siva 等人^[16]研究具有乘性噪声的随机中立型分数阶泛函微分方程的 LDP; Ranjani 等人^[17]对随机分数阶受电弓微分方程建立 LDP。虽然现在关于分数阶随机微分方程的研究相当广泛, 但对于建立分数阶随机时滞微分方程的 LDP 相对较少。

基于以上讨论, 文章考虑如下 Hilfer 分数阶随机时滞微分方程

$$\begin{cases} D_0^{\alpha, \beta} X(t) = b(t, X(t), X(t-\tau)) + \sigma(t, X(t), X(t-\tau)) \frac{dW(t)}{dt}, & t \in J = (0, T] \\ X(t) = \phi(t), & t \in J' = [-\tau, 0] \\ I_0^{1-\gamma} X(0) = \phi(0), & \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta \end{cases} \quad (1)$$

其中, $D_0^{\alpha, \beta}$ 是 Hilfer 分数阶导数, 参数 $\alpha (0 \leq \alpha \leq 1)$, 阶数 $\beta (\frac{1}{2} < \beta < 1)$, $I_0^{1-\gamma}$ 是 Riemann-Liouville (R-L) 分数阶

[收稿日期] 2025-04-14

[修回日期] 2025-07-29

[基金项目] 国家自然科学基金项目 (11961069); 新疆维吾尔自治区自然科学基金项目 (2025D01E16); 新疆优秀青年科技人才培养计划项目 (2019Q022); 新疆师范大学青年拔尖人才项目 (XJNUQB2022-14)。

[作者简介] 陈娟 (2000-), 女, 硕士研究生, 主要从事微分方程理论及数值模拟方面研究, E-mail: juanchen_nice@163.com.

* [通讯作者] 顾海波 (1982-), 男, 教授, 主要从事微分方程理论及数值模拟方面研究, E-mail: hbgu_math@163.com.

积分。此外, Borel可测函数 $b: J \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ 和 $\sigma: J \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m \times d}$ 是连续的。设 $\{W(t)\}_{t \in J}$ 是定义在完备概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上带有 σ -代数流 $\{F_t\}_{t \in J}$ 的 d 维布朗运动。 $\phi \in C([-\tau, 0]; \mathbb{R}^m)$ 表示 $[-\tau, 0]$ 上给定的连续函数, $\tau > 0$ 为固定常数。

1 预备知识

本节将介绍一些定义、引理和定理。先介绍一些有关 LDP 的定义和结果。为此, 设 $\mathbb{E}$ 为 Polish 空间, $\{X^\epsilon, \epsilon > 0\}$ 是一族定义在概率空间 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ 上的 $\mathbb{E}$ -值随机变量。

定义 1^[18](速率函数) 如果函数 $I: \mathbb{E} \rightarrow [0, +\infty]$ 是下半连续的, 则称函数 I 为速率函数。如果对每个 $N < \infty$, 水平集 $K_N := \{f \in \mathbb{E} : I(f) \leq N\}$ 是 $\mathbb{E}$ 的紧子集, 则称 I 是好的速率函数。

定义 2^[18](大偏差原理) 令 I 是定义在 $\mathbb{E}$ 上的速率函数。若 $\mathbb{E}$ -值随机变量族 $\{X^\epsilon\}$ 满足以下两个条件:

(1) 大偏差上界: 对于 $\mathbb{E}$ 中的一切闭子集 F

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log P(X^\epsilon \in F) \leq -I(F)$$

(2) 大偏差下界: 对于 $\mathbb{E}$ 中的一切开子集 G

$$\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log P(X^\epsilon \in G) \geq -I(G)$$

则称 $\{X^\epsilon\}$ 满足速率函数 I 的 LDP。

定义 3^[18](Laplace 原理) 设 I 是 $\mathbb{E}$ 上的速率函数, 如果 $\mathbb{E}$ 上所有的实值有界连续函数 h , 都有

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log E \left\{ \exp \left[-\frac{1}{\epsilon} h(X^\epsilon) \right] \right\} = -\inf_{f \in \mathbb{E}} \{h(f) + I(f)\}$$

则称 $\{X^\epsilon\}$ 满足速率函数 I 的 Laplace 原理。

根据 Varadhan 引理^[19], 给出 LDP 和 Laplace 原理的等价结果。

定理 1^[18] $\{X^\epsilon\}$ 满足速率函数为 I 的 Laplace 原理, 当且仅当 $\{X^\epsilon\}$ 以相同的速率函数 I 满足 LDP。

接下来给出证明 LDP 所需的一些定义和引理。

定义 4^[20] 考虑连续函数的加权空间

$$C_{1-\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^m) = \{f: (0, T] \rightarrow \mathbb{R}^m : x^{1-\gamma} f(x) \in C([0, T]; \mathbb{R}^m)\}, 0 \leq 1 - \gamma < 1$$

其模为 $\|f\|_{C_{1-\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^m)} = \sup_{x \in [0, T]} |x^{1-\gamma} f(x)|$ 。

定义 5^[21] 如果 $X(t)$ 满足以下方程

$$X(t) = \begin{cases} \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \phi_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} b(s, X(s), X(s-\tau)) ds \\ \quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \sigma(s, X(s), X(s-\tau)) dW(s), & t \in J \\ \phi(t), & t \in J' \end{cases} \quad (2)$$

则 $\mathbb{R}^m$ -值随机过程 $\{X(t), -\tau \leq t \leq T\}$ 称为系统(1)的解, 其中 $X(t)$ 相对于 t 来说是连续的且 $\mathcal{F}_t$ 自适应的, $\phi(0) = \phi_0$ 。

为进一步获得所需的结果, 假设以下条件成立:

(A₁) 对 $\forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in \mathbb{R}^m$ 和 $t \in J$, 存在正常数 K_1 , 使得

$$|b(t, x_1, y_1) - b(t, x_2, y_2)| \vee |\sigma(t, x_1, y_1) - \sigma(t, x_2, y_2)| \leq K_1 (t^{1-\gamma} |x_1 - x_2| + (t - \tau)^{1-\gamma} |y_1 - y_2|)$$

(A₂) 对 $x, y \in \mathbb{R}^m, t \in J$, 存在正常数 K_2 , 使得

$$|b(t, x, y)|^2 \vee |\sigma(t, x, y)|^2 \leq K_2^2 (1 + |t^{1-\gamma} x|^2 + |(t - \tau)^{1-\gamma} y|^2)$$

2 带有乘性噪声的 LDP

本节考虑与系统(1)有关的具有乘性噪声的 Hilfer 分数阶随机时滞微分方程的 LDP

$$\begin{cases} D_0^{\alpha,\beta} X^\epsilon(t) = b(t, X^\epsilon(t), X^\epsilon(t-\tau)) + \sqrt{\epsilon} \sigma(t, X^\epsilon(t), X^\epsilon(t-\tau)) \frac{dW(t)}{dt}, & t \in J \\ X^\epsilon(t) = \phi(t), & t \in J' \\ I_0^{1-\gamma} X^\epsilon(0) = \phi(0), & \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta \end{cases} \quad (3)$$

设 $G^\epsilon: C([0, T]; \mathbb{R}^d) \rightarrow C_{1-\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^m)$ 是由 $X^\epsilon(\cdot) = G^\epsilon(W(\cdot))$ 定义的可测映射, 其中 $X^\epsilon(t)$ 是方程(3)的解。令

$$\Lambda = \left\{ \nu: \nu \text{ 是 } \mathbb{R}^d \text{- 值 } \mathcal{F}_t \text{- 可测过程且 } \int_0^T |\nu(s, \omega)|^2 ds < \infty \text{ a.s.} \right\}$$

$$\mathbb{S}_N = \left\{ \psi \in \mathbb{L}^2([0, T]; \mathbb{R}^d): \int_0^T |\psi(s)|^2 ds \leq N \right\}$$

其中, ν 取值于 $\mathbb{R}^d$ 且满足 $\mathcal{F}_t$ -可测过程, $\mathbb{L}^2([0, T]; \mathbb{R}^d)$ 是 $[0, T]$ 上所有 $\mathbb{R}^d$ -值平方可积函数的空间。此外被赋予弱拓扑的 $\mathbb{S}_N$ 是一个 Polish 空间。定义

$$\Lambda_N = \{ \nu \in \Lambda: \nu(\omega) \in \mathbb{S}_N \quad P - a.s. \}$$

根据 Budhiraja 等人^[22]的研究结论, 弱收敛方法基于 Laplace 原理和 LDP 之间的等价性。若要证明 LDP 成立, 只需证明 Laplace 原理成立即可。当 $\epsilon \rightarrow 0$, 随机变量族 $\{X^\epsilon\}$ 满足 Laplace 原理的充分条件如下:

假设存在可测映射 $G^0: C([0, T]; \mathbb{R}^d) \rightarrow C_{1-\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^m)$, 使得以下两个条件成立:

(a) 对任意 $N < \infty$, 集合 $K_N = \left\{ G^0\left(\int_0^\cdot \psi(s) ds\right): \psi \in \mathbb{S}_N \right\}$ 是 $C_{1-\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^m)$ 的紧子集;

(b) 令 $\{\nu^\epsilon: \epsilon > 0\} \subset \Lambda_N$, 当 $N < \infty$ 时, 作为一个 $\mathbb{S}_N$ -值随机变量, ν^ϵ 依分布收敛到 ν , 则当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $G^\epsilon\left(W(\cdot) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_0^\cdot \nu^\epsilon(s) ds\right)$ 依分布收敛到 $G^0\left(\int_0^\cdot \nu(s) ds\right)$ 。

定理 2 若 (A1)、(A2)、(a)、(b) 成立, 则 $\{X^\epsilon\}$ 在 $C_{1-\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^m)$ 上满足 LDP, 且具有如下速率函数

$$I(f) = \inf_{\psi \in \mathbb{L}^2([0, T]; \mathbb{R}^d), f = G^0\left(\int_0^\cdot \psi(s) ds\right)} \left\{ \frac{1}{2} \int_0^T |\psi(s)|^2 ds \right\}$$

且 $\inf(\emptyset) = \infty$ 。

为证明该定理, 要验证 Laplace 原理成立的充分条件。首先要证明紧性条件(a), 引入与方程(3)有关的骨架方程

$$\begin{cases} D_0^{\alpha,\beta} Z^\psi(t) = b(t, Z^\psi(t), Z^\psi(t-\tau)) + \sigma(t, Z^\psi(t), Z^\psi(t-\tau)) \psi(t), & t \in J \\ Z^\psi(t) = \phi(t), & t \in J' \\ I_0^{1-\gamma} Z^\psi(0) = \phi(0) \end{cases} \quad (4)$$

其中, $\psi \in \mathbb{L}^2([0, T]; \mathbb{R}^d)$, 解 Z^ψ 表示为

$$Z^\psi(t) = \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \phi_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} b(s, Z^\psi(s), Z^\psi(s-\tau)) ds + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \sigma(s, Z^\psi(s), Z^\psi(s-\tau)) \psi(s) ds \quad (5)$$

引理 1 假设 (A2) 成立。若 $Z^\psi(t)$ 是方程(4)的解, 则

$$\sup_{0 \leq u \leq t} |u^{1-\gamma} Z^\psi(u)|^2 \leq C^*$$

此外, C^* 是依赖于 $T, \gamma, K_2, \beta, N, M_\phi$ 的正常数。

证明 考虑 $t^{1-\gamma} Z^\psi(t)$, 可以得到

$$t^{1-\gamma} Z^\psi(t) = \frac{1}{\Gamma(\gamma)} \phi_0 + \frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} b(s, Z^\psi(s), Z^\psi(s-\tau)) ds + \frac{t^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \sigma(s, Z^\psi(s), Z^\psi(s-\tau)) \psi(s) ds$$

通过使用初等不等式和 Hölder 不等式以及假设条件 (A2), 有

$$\begin{aligned}
|t^{1-\gamma} Z^\psi(t)|^2 &\leq \frac{3}{\Gamma^2(\gamma)} |\phi_0|^2 + \frac{3t^{2(1-\gamma)}}{\Gamma^2(\beta)} \left(\int_0^t (t-s)^{\beta-1} b(s, Z^\psi(s), Z^\psi(s-\tau)) |ds| \right)^2 \\
&\quad + \frac{3t^{2(1-\gamma)}}{\Gamma^2(\beta)} \left(\int_0^t (t-s)^{\beta-1} \sigma(s, Z^\psi(s), Z^\psi(s-\tau)) \psi(s) |ds| \right)^2 \\
&\leq \frac{3}{\Gamma^2(\gamma)} |\phi_0|^2 + \frac{3t^{2(1-\gamma)}}{\Gamma^2(\beta)} \left(\int_0^t (t-s)^{2\beta-2} |b(s, Z^\psi(s), Z^\psi(s-\tau))|^2 ds \right) \left(\int_0^t 1 ds \right) \\
&\quad + \frac{3t^{2(1-\gamma)}}{\Gamma^2(\beta)} \left(\int_0^t (t-s)^{2\beta-2} |\sigma(s, Z^\psi(s), Z^\psi(s-\tau))|^2 ds \right) \left(\int_0^t |\psi(s)|^2 ds \right) \\
&\leq \frac{3}{\Gamma^2(\gamma)} |\phi_0|^2 + \frac{3t^{3-2\gamma}}{\Gamma^2(\beta)} K_2^2 \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} (1 + |s^{1-\gamma} Z^\psi(s)|^2 + |(s-\tau)^{1-\gamma} Z^\psi(s-\tau)|^2) ds \\
&\quad + \frac{3t^{2(1-\gamma)}}{\Gamma^2(\beta)} NK_2^2 \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} (1 + |s^{1-\gamma} Z^\psi(s)|^2 + |(s-\tau)^{1-\gamma} Z^\psi(s-\tau)|^2) ds
\end{aligned}$$

记 $M_\phi = \sup_{-\tau \leq u \leq 0} |\phi(u)|^2$. 下面分两种情况讨论:

情形 1: $0 < t \leq \tau$

对任意 $s \in [0, t]$, 有 $s - \tau \leq 0$, 故 $|(s - \tau)^{1-\gamma} Z^\psi(s - \tau)|^2 \leq M_\phi$. 代入得

$$\begin{aligned}
|t^{1-\gamma} Z^\psi(t)|^2 &\leq \frac{3}{\Gamma^2(\gamma)} |\phi_0|^2 + \frac{3t^{3-2\gamma}}{\Gamma^2(\beta)} K_2^2 \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} (1 + |s^{1-\gamma} Z^\psi(s)|^2 + M_\phi) ds \\
&\quad + \frac{3t^{2(1-\gamma)}}{\Gamma^2(\beta)} NK_2^2 \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} (1 + |s^{1-\gamma} Z^\psi(s)|^2 + M_\phi) ds
\end{aligned}$$

令 $M(t) = \sup_{0 \leq u \leq t} |u^{1-\gamma} Z^\psi(u)|^2$, 原不等式可整理为

$$\begin{aligned}
M(t) &\leq M_1 + M_2 \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} (1 + M_\phi + M(s)) ds + M_3 \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} (1 + M_\phi + M(s)) ds \\
&\leq (M_1 + M_2(1 + M_\phi) \frac{T^{2\beta-1}}{2\beta-1} + M_3(1 + M_\phi) \frac{T^{2\beta-1}}{2\beta-1}) + M_2 \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} M(s) ds + M_3 \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} M(s) ds \\
&\leq (M_1 + M_2(1 + M_\phi) \frac{T^{2\beta-1}}{2\beta-1} + M_3(1 + M_\phi) \frac{T^{2\beta-1}}{2\beta-1}) + (M_2 + M_3) \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} M(s) ds
\end{aligned}$$

其中, $M_1 = \frac{3}{\Gamma^2(\gamma)} |\phi_0|^2$, $M_2 = \frac{3K_2^2 T^{3-2\gamma}}{\Gamma^2(\beta)}$, $M_3 = \frac{3T^{2(1-\gamma)}}{\Gamma^2(\beta)} NK_2^2$. 应用分数阶 Gronwall 不等式^[23]结合 Mittag-Leffler

函数 $\Xi_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(1+k\alpha)}$. 对所有 $t \in [0, T]$ 可以得到

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq u \leq t} |u^{1-\gamma} Z^\psi(u)|^2 &\leq \left(\frac{3}{\Gamma^2(\gamma)} |\phi_0|^2 + \frac{3K_2^2 T^{2(\beta-\gamma)+1}}{\Gamma^2(\beta)(2\beta-1)} (1 + M_\phi) + \frac{3K_2^2 NT^{2(\beta-\gamma)+1}}{\Gamma^2(\beta)(2\beta-1)} (1 + M_\phi) \right) \\
&\quad \times \Xi_{2\beta-1} \left(\frac{3K_2^2 T^{2(\beta-\gamma)+1}}{\Gamma^2(\beta)} \Gamma(2\beta-1) + \frac{3K_2^2 NT^{2(\beta-\gamma)+1}}{\Gamma^2(\beta)} \Gamma(2\beta-1) \right)
\end{aligned}$$

情形 2: $\tau < t \leq T$

当 $0 \leq s \leq \tau$ 时, $|(s - \tau)^{1-\gamma} Z^\psi(s - \tau)|^2 \leq M_\phi$; 当 $\tau < s \leq t$ 时, $|(s - \tau)^{1-\gamma} Z^\psi(s - \tau)|^2 \leq M(s)$. 于是

$$\begin{aligned}
|t^{1-\gamma} Z^\psi(t)|^2 &\leq \frac{3}{\Gamma^2(\gamma)} |\phi_0|^2 + \frac{3t^{3-2\gamma}}{\Gamma^2(\beta)} K_2^2 \int_0^\tau (t-s)^{2\beta-2} (1 + |s^{1-\gamma} Z^\psi(s)|^2 + M_\phi) ds \\
&\quad + \frac{3t^{3-2\gamma}}{\Gamma^2(\beta)} K_2^2 \int_\tau^t (t-s)^{2\beta-2} (1 + |s^{1-\gamma} Z^\psi(s)|^2 + |(s-\tau)^{1-\gamma} Z^\psi(s-\tau)|^2) ds \\
&\quad + \frac{3t^{2(1-\gamma)}}{\Gamma^2(\beta)} NK_2^2 \int_0^\tau (t-s)^{2\beta-2} (1 + |s^{1-\gamma} Z^\psi(s)|^2 + M_\phi) ds \\
&\quad + \frac{3t^{2(1-\gamma)}}{\Gamma^2(\beta)} NK_2^2 \int_\tau^t (t-s)^{2\beta-2} (1 + |s^{1-\gamma} Z^\psi(s)|^2 + |(s-\tau)^{1-\gamma} Z^\psi(s-\tau)|^2) ds
\end{aligned}$$

取上确界并整理得

$$\begin{aligned}
M(t) &\leq M_1 + M_2 \left[\int_0^\tau (t-s)^{2\beta-2} (1 + M_\phi + M(s)) ds + \int_\tau^t (t-s)^{2\beta-2} (1 + 2M(s)) ds \right] \\
&\quad + M_3 \left[\int_0^\tau (t-s)^{2\beta-2} (1 + M_\phi + M(s)) ds + \int_\tau^t (t-s)^{2\beta-2} (1 + 2M(s)) ds \right] \\
&\leq M_1 + M_2 \frac{(1 + M_\phi)t^{2\beta-1} - M_\phi(t-\tau)^{2\beta-1}}{2\beta-1} + M_3 \frac{(1 + M_\phi)t^{2\beta-1} - M_\phi(t-\tau)^{2\beta-1}}{2\beta-1} \\
&\quad + M_2 \left[\int_0^\tau (t-s)^{2\beta-2} M(s) ds + 2 \int_\tau^t (t-s)^{2\beta-2} M(s) ds \right] + M_3 \left[\int_0^\tau (t-s)^{2\beta-2} M(s) ds + 2 \int_\tau^t (t-s)^{2\beta-2} M(s) ds \right] \\
&\leq (M_1 + M_2 \frac{T^{2\beta-1}}{2\beta-1} + M_3 \frac{T^{2\beta-1}}{2\beta-1}) + (2M_2 + 2M_3) \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} M(s) ds
\end{aligned}$$

最后,应用分数阶 Gronwall 不等式,可得:

$$\begin{aligned}
\sup_{0 \leq u \leq t} |u^{1-\gamma} Z^\psi(u)|^2 &\leq \left(\frac{3}{\Gamma^2(\gamma)} |\phi_0|^2 + \frac{3K_2^2 T^{2(\beta-\gamma+1)}}{\Gamma^2(\beta)(2\beta-1)} + \frac{3K_2^2 NT^{2(\beta-\gamma)+1}}{\Gamma^2(\beta)(2\beta-1)} \right) \\
&\quad \times \Xi_{2\beta-1} \left(\frac{6K_2^2 T^{2(\beta-\gamma+1)}}{\Gamma^2(\beta)} \Gamma(2\beta-1) + \frac{6K_2^2 NT^{2(\beta-\gamma)+1}}{\Gamma^2(\beta)} \Gamma(2\beta-1) \right)
\end{aligned}$$

综合情形 1 和情形 2, 对任意 $t \in [0, T]$ 有 $\sup_{0 \leq u \leq t} |u^{1-\gamma} Z^\psi(u)|^2 \leq C^*$.

引理 2 若存在可测映射 $G^0: C([0, T]; \mathbb{R}^d) \rightarrow C_{1-\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^m)$ 使得

$$G^0(g) = \begin{cases} Z^\psi, & \text{如果 } g = \int_0^\cdot \psi(s) ds, \psi \in \mathbb{L}^2([0, T]; \mathbb{R}^d) \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

则对 $\forall N < \infty$, 集合 $K_N = \left\{ G^0 \left(\int_0^\cdot \psi(s) ds \right) : \psi \in \mathbb{S}_N \right\}$ 是 $C_{1-\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^m)$ 的紧子集。

证明 对于任何序列 $\psi_n \in \mathbb{S}_N$, 可以假设在 $\mathbb{L}^2([0, T]; \mathbb{R}^d)$ 中 ψ_n 弱收敛于 ψ . 令 Z^{ψ_n} 是方程(4)的解, 将 ψ 替换为 ψ_n 可得

$$\begin{aligned}
Z^{\psi_n}(t) &= \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \phi_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} b(s, Z^{\psi_n}(s), Z^{\psi_n}(s-\tau)) ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \sigma(s, Z^{\psi_n}(s), Z^{\psi_n}(s-\tau)) \psi_n(s) ds
\end{aligned} \tag{6}$$

现在证明: 当 $n \rightarrow \infty$ 时, Z^{ψ_n} 在 $C_{1-\gamma}([0, T]; \mathbb{R}^m)$ 中收敛于 Z^ψ . 对于 $t \in [0, T]$, 结合式(5)和式(6), 有

$$\begin{aligned}
Z^{\psi_n}(t) - Z^\psi(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} [b(s, Z^{\psi_n}(s), Z^{\psi_n}(s-\tau)) - b(s, Z^\psi(s), Z^\psi(s-\tau))] ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} [\sigma(s, Z^{\psi_n}(s), Z^{\psi_n}(s-\tau)) \psi_n(s) - \sigma(s, Z^\psi(s), Z^\psi(s-\tau)) \psi(s)] ds \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} [b(s, Z^{\psi_n}(s), Z^{\psi_n}(s-\tau)) - b(s, Z^\psi(s), Z^\psi(s-\tau))] ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} [\sigma(s, Z^{\psi_n}(s), Z^{\psi_n}(s-\tau)) - \sigma(s, Z^\psi(s), Z^\psi(s-\tau))] \psi_n(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \sigma(s, Z^\psi(s), Z^\psi(s-\tau)) [\psi_n(s) - \psi(s)] ds \\
&= I_1 + I_2 + I_3
\end{aligned} \tag{7}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} [b(s, Z^{\psi_n}(s), Z^{\psi_n}(s-\tau)) - b(s, Z^\psi(s), Z^\psi(s-\tau))] ds \\
I_2 &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} [\sigma(s, Z^{\psi_n}(s), Z^{\psi_n}(s-\tau)) - \sigma(s, Z^\psi(s), Z^\psi(s-\tau))] \psi_n(s) ds \\
I_3 &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \sigma(s, Z^\psi(s), Z^\psi(s-\tau)) [\psi_n(s) - \psi(s)] ds
\end{aligned}$$

首先,考虑 I_1 和 I_2 , 使用假设条件(A1), 可得

$$\begin{aligned} |I_1| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |b(s, Z^{\psi_n}(s), Z^{\psi_n}(s-\tau)) - b(s, Z^{\psi}(s), Z^{\psi}(s-\tau))| ds \\ &\leq \frac{K_1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} (s^{1-\gamma} |Z^{\psi_n}(s) - Z^{\psi}(s)| + (s-\tau)^{1-\gamma} |Z^{\psi_n}(s-\tau) - Z^{\psi}(s-\tau)|) ds \end{aligned} \quad (8)$$

$$= \frac{K_1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} s^{1-\gamma} |Z^{\psi_n}(s) - Z^{\psi}(s)| ds + \frac{K_1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} (s-\tau)^{1-\gamma} |Z^{\psi_n}(s-\tau) - Z^{\psi}(s-\tau)| ds$$

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |\sigma(s, Z^{\psi_n}(s), Z^{\psi_n}(s-\tau)) - \sigma(s, Z^{\psi}(s), Z^{\psi}(s-\tau))| |\psi_n(s)| ds \\ &\leq \frac{K_1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} (s^{1-\gamma} |Z^{\psi_n}(s) - Z^{\psi}(s)| + (s-\tau)^{1-\gamma} |Z^{\psi_n}(s-\tau) - Z^{\psi}(s-\tau)|) |\psi_n(s)| ds \\ &= \frac{K_1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} s^{1-\gamma} |Z^{\psi_n}(s) - Z^{\psi}(s)| |\psi_n(s)| ds + \frac{K_1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} (s-\tau)^{1-\gamma} |Z^{\psi_n}(s-\tau) - Z^{\psi}(s-\tau)| |\psi_n(s)| ds \end{aligned} \quad (9)$$

最后,考虑 I_3 , 利用 Hölder 不等式, 假设条件(A2)以及引理2有

$$\begin{aligned} |I_3| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |\sigma(s, Z^{\psi}(s), Z^{\psi}(s-\tau))| |\psi_n(s) - \psi(s)| ds \\ &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left(\int_0^t (t-s)^{2\beta-2} |\sigma(s, Z^{\psi}(s), Z^{\psi}(s-\tau))|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |\psi_n(s) - \psi(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{K_2 \sqrt{1+2C^*}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\frac{1}{2}} \|\psi_n - \psi\|_{L^2[0,T]} \end{aligned} \quad (10)$$

对式(7)取模 $|Z^{\psi_n}(t) - Z^{\psi}(t)| \leq |I_1| + |I_2| + |I_3|$, 并将式(8)~式(10)代入, 则以下成立

$$\begin{aligned} t^{1-\gamma} |Z^{\psi_n}(t) - Z^{\psi}(t)| &\leq \frac{K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} s^{1-\gamma} |Z^{\psi_n}(s) - Z^{\psi}(s)| ds \\ &\quad + \frac{K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} (s-\tau)^{1-\gamma} |Z^{\psi_n}(s-\tau) - Z^{\psi}(s-\tau)| ds \\ &\quad + \frac{K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} s^{1-\gamma} |Z^{\psi_n}(s) - Z^{\psi}(s)| |\psi_n(s)| ds \\ &\quad + \frac{K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} (s-\tau)^{1-\gamma} |Z^{\psi_n}(s-\tau) - Z^{\psi}(s-\tau)| |\psi_n(s)| ds \\ &\quad + \frac{K_2 \sqrt{1+2C^*}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}} \|\psi_n - \psi\|_{L^2[0,T]} \end{aligned}$$

令 $k_n(t) = \sup_{0 \leq u \leq t} u^{1-\gamma} |Z^{\psi_n}(u) - Z^{\psi}(u)|$, 下面分两种情况讨论:

情形 1: $0 < t \leq \tau$

$$\begin{aligned} k_n(t) &\leq \frac{K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} k_n(s) ds + \frac{K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} k_n(s) |\psi_n(s)| ds \\ &\quad + \frac{K_2 \sqrt{1+2C^*}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}} \|\psi_n - \psi\|_{L^2[0,T]} \\ &\leq \frac{K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \left(\int_0^t (t-s)^{2\beta-2} k_n(s)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t 1 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \left(\int_0^t (t-s)^{2\beta-2} k_n(s)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |\psi_n(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{K_2 \sqrt{1+2C^*}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}} \|\psi_n - \psi\|_{L^2[0,T]} \end{aligned}$$

记 $A_n(t) = k_n(t)^2$, 则

$$A_n(t) \leq \frac{3K_1^2 T^{2(1-\gamma)}(T+N)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} A_n(s) ds + \left(\frac{K_2 \sqrt{3(1+2C^*)}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}} \|\psi_n - \psi\|_{L^1[0,T]} \right)^2$$

使用分数阶 Gronwall 不等式得:

$$k_n(t)^2 \leq \left(\frac{K_2 \sqrt{3(1+2C^*)}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}} \|\psi_n - \psi\|_{L^1[0,T]} \right)^2 \times \Xi_{2\beta-1} \left(\frac{3K_1^2 T^{2(\beta-\gamma)+1}(T+N)}{\Gamma^2(\beta)} \Gamma(2\beta-1) \right)$$

情形 2: $\tau < t \leq T$

$$\begin{aligned} k_n(t) &\leq \frac{2K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} k_n(s) ds + \frac{2K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} k_n(s) |\psi_n(s)| ds + \frac{K_2 \sqrt{1+2C^*}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}} \|\psi_n - \psi\|_{L^1[0,T]} \\ &\leq \frac{2K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \left(\int_0^t (t-s)^{2\beta-2} k_n(s)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t 1 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \left(\int_0^t (t-s)^{2\beta-2} k_n(s)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |\psi_n(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{K_2 \sqrt{1+2C^*}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}} \|\psi_n - \psi\|_{L^1[0,T]} \end{aligned}$$

则

$$A_n(t) \leq \frac{12K_1^2 T^{2(1-\gamma)}(T+N)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} A_n(s) ds + \left(\frac{K_2 \sqrt{3(1+2C^*)}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}} \|\psi_n - \psi\|_{L^1[0,T]} \right)^2$$

使用分数阶 Gronwall 不等式得

$$k_n(t)^2 \leq \left(\frac{K_2 \sqrt{3(1+2C^*)}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}} \|\psi_n - \psi\|_{L^1[0,T]} \right)^2 \times \Xi_{2\beta-1} \left(\frac{12K_1^2 T^{2(\beta-\gamma)+1}(T+N)}{\Gamma^2(\beta)} \Gamma(2\beta-1) \right)$$

综合情形 1 和情形 2, 结合上述不等式可得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{0 \leq u \leq t} u^{1-\gamma} |Z^{\psi_n}(u) - Z^{\psi}(u)| = 0 \quad (11)$$

则紧性条件证明完毕。

为了证明收敛性条件(b), 考虑以下扰动随机控制方程

$$\begin{aligned} X_{\nu^\epsilon}^\epsilon(t) &= \frac{t^{\gamma-1}}{\Gamma(\gamma)} \phi_0 + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} b(s, X_{\nu^\epsilon}^\epsilon(s), X_{\nu^\epsilon}^\epsilon(s-\tau)) ds \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \sigma(s, X_{\nu^\epsilon}^\epsilon(s), X_{\nu^\epsilon}^\epsilon(s-\tau)) \nu^\epsilon(s) ds \\ &\quad + \frac{\sqrt{\epsilon}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \sigma(s, X_{\nu^\epsilon}^\epsilon(s), X_{\nu^\epsilon}^\epsilon(s-\tau)) dW(s) \end{aligned} \quad (12)$$

定义
$$X_{\nu^\epsilon}^\epsilon(\cdot) = G^\epsilon \left(W(\cdot) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_0^\cdot \nu^\epsilon(s) ds \right)$$

引理 3 假设(A2)成立。若 $X_{\nu^\epsilon}^\epsilon(t)$ 是方程(12)的解, 则满足以下估计

$$E \left(\sup_{0 \leq u \leq t} |u^{1-\gamma} X_{\nu^\epsilon}^\epsilon(u)|^2 \right) \leq C'$$

其中, C' 是依赖于 $T, \gamma, K_1, \beta, N, \epsilon, M_\phi$ 的正常数。

证明 该证明步骤与引理 2 的证明逻辑一致, 此处证明过程不再赘述。

引理 4 令 $\{\nu^\epsilon; \epsilon > 0\} \subset \Lambda_N$, 其中 $N < \infty$, 假设 ν^ϵ 作为 S_N -值随机元素依分布收敛到 ν . 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 则

$$G^\epsilon \left(W(\cdot) + \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \int_0^\cdot \nu^\epsilon(s) ds \right) \rightarrow G^0 \left(\int_0^\cdot \nu(s) ds \right) \text{ 依分布收敛.}$$

证明 结合式(5)和式(12)有

$$\begin{aligned}
L(t) &= X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(t) - Z^{\nu}(t) \\
&= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} [b(s, X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s), X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s-\tau)) - b(s, Z^{\nu}(s), Z^{\nu}(s-\tau))] ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} [\sigma(s, X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s), X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s-\tau)) - \sigma(s, Z^{\nu}(s), Z^{\nu}(s-\tau))] \nu^{\epsilon}(s) ds \\
&\quad + \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \sigma(s, Z^{\nu}(s), Z^{\nu}(s-\tau)) [\nu^{\epsilon}(s) - \nu(s)] ds \\
&\quad + \frac{\sqrt{\epsilon}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \sigma(s, X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s), X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s-\tau)) dW(s) \\
&= L_1(t) + L_2(t) + L_3(t) + L_4(t)
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
L_1(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} [b(s, X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s), X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s-\tau)) - b(s, Z^{\nu}(s), Z^{\nu}(s-\tau))] ds \\
L_2(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} [\sigma(s, X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s), X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s-\tau)) - \sigma(s, Z^{\nu}(s), Z^{\nu}(s-\tau))] \nu^{\epsilon}(s) ds \\
L_3(t) &= \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \sigma(s, Z^{\nu}(s), Z^{\nu}(s-\tau)) [\nu^{\epsilon}(s) - \nu(s)] ds \\
L_4(t) &= \frac{\sqrt{\epsilon}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} \sigma(s, X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s), X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s-\tau)) dW(s)
\end{aligned}$$

为了估计 $E \sup_{0 \leq u \leq t} u^{1-\gamma} |L(u)|$, 将 $L(t)$ 分解为 $|L(t)| \leq |L_1(t)| + |L_2(t)| + |L_3(t)| + |L_4(t)|$, 取上确界并取期望可得

$$E \sup_{0 \leq u \leq t} u^{1-\gamma} |L(u)| \leq E \sup_{0 \leq u \leq t} u^{1-\gamma} |L_1(u)| + E \sup_{0 \leq u \leq t} u^{1-\gamma} |L_2(u)| + E \sup_{0 \leq u \leq t} u^{1-\gamma} |L_3(u)| + E \sup_{0 \leq u \leq t} u^{1-\gamma} |L_4(u)|$$

首先, 考虑 $|L_1(t)|$ 和 $|L_2(t)|$, 由假设条件(A1)有

$$\begin{aligned}
|L_1(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |b(s, X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s), X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s-\tau)) - b(s, Z^{\nu}(s), Z^{\nu}(s-\tau))| ds \\
&\leq \frac{K_1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} (s^{1-\gamma} |X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s) - Z^{\nu}(s)| + (s-\tau)^{1-\gamma} |X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s-\tau) - Z^{\nu}(s-\tau)|) ds
\end{aligned} \tag{13}$$

$$\begin{aligned}
|L_2(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} |\sigma(s, X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s), X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s-\tau)) - \sigma(s, Z^{\nu}(s), Z^{\nu}(s-\tau))| \nu^{\epsilon}(s) ds \\
&\leq \frac{K_1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} (s^{1-\gamma} |X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s) - Z^{\nu}(s)| + (s-\tau)^{1-\gamma} |X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s-\tau) - Z^{\nu}(s-\tau)|) \nu^{\epsilon}(s) ds
\end{aligned} \tag{14}$$

其次, 考虑 $|L_3(t)|$, 由 Hölder 不等式以及假设条件(A2), 可得

$$\begin{aligned}
|L_3(t)| &\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left(\int_0^t (t-s)^{\beta-1} \sigma(s, Z^{\nu}(s), Z^{\nu}(s-\tau)) (\nu^{\epsilon}(s) - \nu(s)) ds \right) \\
&\leq \frac{1}{\Gamma(\beta)} \left(\int_0^t (t-s)^{2\beta-2} |\sigma(s, Z^{\nu}(s), Z^{\nu}(s-\tau))|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |\nu^{\epsilon}(s) - \nu(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \frac{K_2 \sqrt{1+2C^*}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\frac{1}{2}} \| \nu^{\epsilon} - \nu \|_{L^2[0,T]}
\end{aligned} \tag{15}$$

最后, 考虑 $E(\sup_{0 \leq u \leq t} u^{1-\gamma} |L_4(u)|)$, 利用 Burkholder - Davis - Gundy(B-D-G) 不等式^[24] A2 得

$$\begin{aligned}
E(\sup_{0 \leq u \leq t} u^{1-\gamma} |L_4(u)|) &\leq \frac{\sqrt{\epsilon} T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} E(\sup_{0 \leq u \leq t} |\int_0^u (u-s)^{\beta-1} \sigma(s, X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s), X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s-\tau)) dW(s)|) \\
&\leq \frac{\sqrt{\epsilon} \tilde{C} T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} E(\int_0^t (t-s)^{\beta-1} \sigma(s, X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s), X_{\nu^{\epsilon}}^{\epsilon}(s-\tau)) ds) \\
&\leq \frac{\sqrt{\epsilon} \tilde{C} K_2}{\Gamma(\beta)} \frac{T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\beta-1}} \sqrt{1+2C'}
\end{aligned} \tag{16}$$

其中 $\tilde{C}$ 为 B-D-G 常数。

情形 1: $0 < t \leq \tau$

令 $B(t) = E \sup_{0 \leq u \leq t} u^{1-\gamma} |X_{\nu^\epsilon}(u) - Z^\nu(u)|$. 因此, 根据式 (13)~式 (16) 可以得到

$$\begin{aligned} B(t) &\leq \frac{K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} B(s) ds + \frac{K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} B(s) |\nu^\epsilon(s)| ds \\ &\quad + \frac{K_2 \sqrt{1+2C^*}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}} \|\nu^\epsilon - \nu\|_{L^2[0,T]} + \frac{\sqrt{\epsilon} \tilde{C} K_2}{\Gamma(\beta)} \frac{T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\beta-1}} \sqrt{1+2C'} \\ &\leq \frac{K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \left(\int_0^t (t-s)^{2\beta-2} B(s)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t 1 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \left(\int_0^t (t-s)^{2\beta-2} B(s)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |\nu^\epsilon(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{K_2 \sqrt{1+2C^*}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}} \|\nu^\epsilon - \nu\|_{L^2[0,T]} + \frac{\sqrt{\epsilon} \tilde{C} K_2}{\Gamma(\beta)} \frac{T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\beta-1}} \sqrt{1+2C'} \end{aligned}$$

记 $O(t) = B(t)^2$, 则

$$\begin{aligned} O(t) &\leq \frac{4K_1^2 T^{2(1-\gamma)} (T+N)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} O(s) ds + \left(\frac{2K_2 \sqrt{1+2C^*}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}} \|\nu^\epsilon - \nu\|_{L^2[0,T]} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{2\sqrt{\epsilon} \tilde{C} K_2}{\Gamma(\beta)} \frac{T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\beta-1}} \sqrt{1+2C'} \right)^2 \end{aligned}$$

使用分数阶 Gronwall 不等式并进一步简化, 可得

$$\begin{aligned} B(t)^2 &\leq \left[\left(\frac{2K_2 \sqrt{1+2C^*}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}} \|\nu^\epsilon - \nu\|_{L^2[0,T]} \right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{\epsilon} \tilde{C} K_2}{\Gamma(\beta)} \frac{T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\beta-1}} \sqrt{1+2C'} \right)^2 \right] \\ &\quad \times \Xi_{2\beta-1} \left(\frac{4K_1^2 T^{2(\beta-\gamma)+1} (T+N)}{\Gamma^2(\beta)} \Gamma(2\beta-1) \right) \end{aligned}$$

情形 2: $\tau < t \leq T$

$$\begin{aligned} B(t) &\leq \frac{2K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} B(s) ds + \frac{2K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t-s)^{\beta-1} B(s) |\nu^\epsilon(s)| ds \\ &\quad + \frac{K_2 \sqrt{1+2C^*}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}} \|\nu^\epsilon - \nu\|_{L^2[0,T]} + \frac{\sqrt{\epsilon} \tilde{C} K_2}{\Gamma(\beta)} \frac{T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\beta-1}} \sqrt{1+2C'} \\ &\leq \frac{2K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \left(\int_0^t (t-s)^{2\beta-2} B(s)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t 1 ds \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{2K_1 T^{1-\gamma}}{\Gamma(\beta)} \left(\int_0^t (t-s)^{2\beta-2} B(s)^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^t |\nu^\epsilon(s)|^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} \\ &\quad + \frac{K_2 \sqrt{1+2C^*}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}} \|\nu^\epsilon - \nu\|_{L^2[0,T]} + \frac{\sqrt{\epsilon} \tilde{C} K_2}{\Gamma(\beta)} \frac{T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\beta-1}} \sqrt{1+2C'} \end{aligned}$$

则

$$\begin{aligned} O(t) &\leq \frac{16K_1^2 T^{2(1-\gamma)} (T+N)}{\Gamma^2(\beta)} \int_0^t (t-s)^{2\beta-2} O(s) ds + \left(\frac{2K_2 \sqrt{1+2C^*}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}} \|\nu^\epsilon - \nu\|_{L^2[0,T]} \right)^2 \\ &\quad + \left(\frac{2\sqrt{\epsilon} \tilde{C} K_2}{\Gamma(\beta)} \frac{T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\beta-1}} \sqrt{1+2C'} \right)^2 \end{aligned}$$

使用分数阶 Gronwall 不等式并进一步简化, 可得

$$\begin{aligned} B(t)^2 &\leq \left[\left(\frac{2K_2 \sqrt{1+2C^*}}{\Gamma(\beta) \sqrt{2\beta-1}} T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}} \|\nu^\epsilon - \nu\|_{L^2[0,T]} \right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{\epsilon} \tilde{C} K_2}{\Gamma(\beta)} \frac{T^{\beta-\gamma+\frac{1}{2}}}{\sqrt{2\beta-1}} \sqrt{1+2C'} \right)^2 \right] \\ &\quad \times \Xi_{2\beta-1} \left(\frac{16K_1^2 T^{2(\beta-\gamma)+1} (T+N)}{\Gamma^2(\beta)} \Gamma(2\beta-1) \right) \end{aligned}$$

对于任意给定的正数 $\eta > 0$, 由 Chebyshev 不等式有

$$P(\sup_{u \in [0, t]} u^{1-\gamma} |X_{\nu}^{\epsilon}(u) - Z^{\nu}(u)| > \eta) \leq \frac{1}{\eta} E(\sup_{u \in [0, t]} u^{1-\gamma} |X_{\nu}^{\epsilon}(u) - Z^{\nu}(u)|)$$

当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, ν^{ϵ} 依分布收敛到 ν . 综合情形 1 和情形 2, $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} E(\sup_{u \in [0, t]} u^{1-\gamma} |X_{\nu}^{\epsilon}(u) - Z^{\nu}(u)|) = 0$, 则

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} P(\sup_{u \in [0, t]} u^{1-\gamma} |X_{\nu}^{\epsilon}(u) - Z^{\nu}(u)| > \eta) = 0$$

由此可见, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $X_{\nu}^{\epsilon}(t)$ 在概率上收敛到 $Z^{\nu}(t)$. 根据概率收敛意味着分布收敛或弱收敛. 得出结论, 当 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, $X_{\nu}^{\epsilon}(t)$ 弱收敛到 $Z^{\nu}(t)$. 因此, 收敛性条件证明完毕。

证毕。

注 1 文章选用 Hilfer 分数阶导数, 因其具有更广的普适性, 当参数 $\alpha = 0$ 时退化为 Caputo 导数, $\alpha = 1$ 时退化为 Riemann-Liouville 导数. 这两类分数阶导数所描述的系统, 均可得到大偏差原理。

3 模型应用

本节以金融市场模型为例, 展示如何将 Hilfer 分数阶随机时滞微分方程的 LDP 应用于实际系统, 分析小噪声扰动下系统的运行情况. 该模型中资产价格 $S(t)$ 受随机波动、历史价格的影响, 引入分数阶导数捕捉资产价格的“记忆效应”, 并考虑随机噪声与时滞因素, 方程形式如下

$$\begin{cases} D_0^{\frac{1}{2}, \frac{3}{4}} S^{\epsilon}(t) = \mu S^{\epsilon}(t) + \pi^2 S^{\epsilon}(t-1) + \sqrt{\epsilon} \sigma(S^{\epsilon}(t)) \frac{dW(t)}{dt}, & t \in (0, T] \\ S^{\epsilon}(t) = \phi(t), & t \in [-1, 0] \\ I_0^{1-\gamma} S^{\epsilon}(0) = \phi(0), & \gamma = \alpha + \beta - \alpha\beta \end{cases} \quad (17)$$

其中, $D_0^{\alpha, \beta} \left(\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{3}{4} \right)$ 是 Hilfer 分数阶导数, 用于捕捉资产价格的“记忆效应”, 即当前价格依赖过去状态, μ 是预期收益率; π^2 是时滞项系数, 表示历史价格对当前的影响; σ 是波动率; $W(t)$ 是标准布朗运动, 表示市场的随机波动; ϵ 表示噪声强度; 初始条件为 $S^{\epsilon}(t) = \phi(t)$, $t \in [-1, 0]$ 表示历史价格区间, 其中 $\phi(t)$ 是给定的初始价格函数; $S^{\epsilon}(t-1)$ 表示资产价格在 $t-1$ 时刻的值, 反映了历史价格对当前价格的影响。

根据 LDP, 要探究的是在小噪声 ϵ 的扰动下, 资产价格偏离其期望行为的概率. 具体来说, 即找到一个速率函数 $I(\varphi)$, 使得

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon \log P(S^{\epsilon} \approx \varphi) = -I(\varphi)$$

其中, φ 是一个可能的路径, 表示资产价格的轨迹. 当小噪声 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 随机项可以表示为一个“控制函数” $\nu(t)$

$$\nu(t) = \sqrt{\epsilon} \sigma(S^{\epsilon}(t)) \frac{dW(t)}{dt}$$

通过对两边积分, 可以得到控制函数的积分 $\int_0^T \nu^2(t) dt$. 根据大偏差理论, 速率函数 $I(\varphi)$ 通常与控制函数的积分相关. 对于 Hilfer 分数阶随机时滞微分方程, 速率函数可以表示为

$$I(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^T |\nu(t)|^2 dt$$

因此, 速率函数 $I(\varphi)$ 可以表示为

$$I(\varphi) = \frac{1}{2} \int_0^T |D_0^{\alpha, \beta} \varphi(t) - (\mu \varphi(t) + \pi^2 \varphi(t-1))|^2 dt$$

该速率函数意味着路径 φ 如果越偏离由确定性部分 $\mu \varphi(t) + \pi^2 \varphi(t-1)$ 描述的行为, 其出现的概率就越小。

设置系统 (17) 的参数如下: $T = 1, h = 0.001, \mu = 0.05, \pi^2 = 0.1, \sigma = 0.6, \epsilon = 0.5, \phi(t) = 100, t \in [-1, 0]$. 通过蒙特卡洛模拟生成的 100 条资产价格路径中, 图 1 显示随机路径 $S^{0.5}(t)$ (红色虚线) 围绕确定性路径 (黑色实线) 小幅波动, 整体仍受确定性模型主导. 图 2 中控制函数能量 $\nu^2(t)$ 的动态变化揭示了随机扰动强度, 数值越大表明随机项对系统影响越显著, 反之则影响减弱. 此时的速率函数值为 $I(\varphi) = 97.9063$.

当 $\epsilon = 0.5$ 时, 资产价格路径 $S^{0.5}(t)$ 围绕确定性路径波动明显。基于 LDP, 探讨在小噪声扰动下资产价格偏离其期望行为的概率, 所以设置两个更小的噪声 $\epsilon = 0.1$ 、 $\epsilon = 0.01$ 来进行研究 (其他参数不变)。如图 3 所示, 噪声越小 (如 $\epsilon = 0.01$), 路径 $S^\epsilon(t)$ 越集中于确定性解附近, 随机扰动对系统行为的影响越小, 甚至与确定性路径几乎重合。对应的速率函数值分别为 19.5813 ($\epsilon = 0.1$) 和 1.9581 ($\epsilon = 0.01$), 数值越小表明路径偏离概率越低, 这与 LDP 一致。

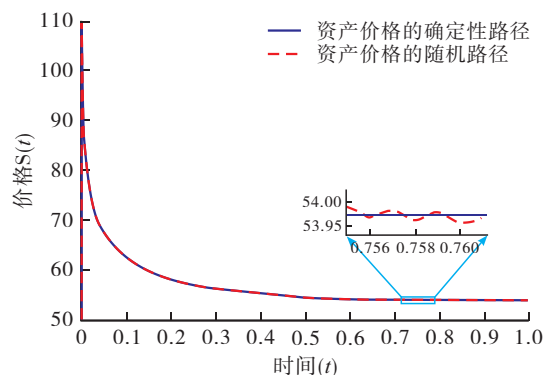


图1 噪声 $\epsilon=0.5$ 时的资产价格路径 $S^\epsilon(t)$

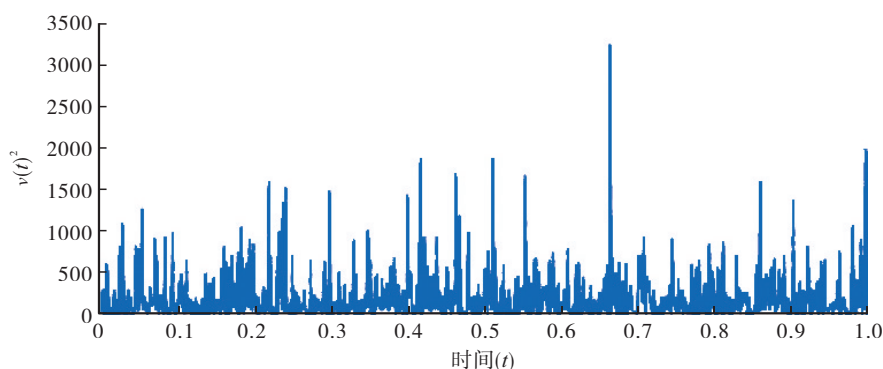


图2 控制函数能量 $v^2(t)$ 随时间的变化情况

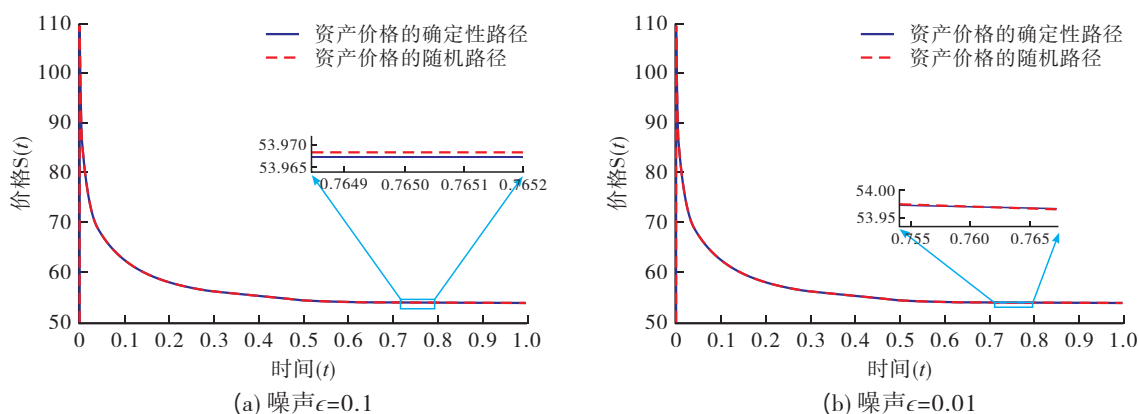


图3 资产价格路径 $S^\epsilon(t)$ 随时间 t 的变化情况

实验结果证实 LDP, 即使噪声较大, 随机路径仍与确定性解高度吻合, 偏离概率极低。这种稳定性或源于分数阶导数与时滞项的特性, 其动态行为在小概率事件中仍保持稳定, 与大偏差预测一致。

参考文献:

- [1] 邱清华. 外汇市场中分数阶 Fokker-Planck 方程的推导及其应用[D]. 杭州: 杭州电子科技大学, 2011.
- [2] 龚权标. 土壤溶质异常运输的时间分数阶对流扩散模型[J]. 应用数学进展, 2024, 13(08): 3969-3975.
- [3] WHARMBY A W, BAGLEY R L. Generalization of a Theoretical Basis for the Application of Fractional Calculus to

- Viscoelasticity[J]. *Journal of Rheology*, 2013, 57(05): 1429–1440.
- [4] DUPUIS P, WANG H. Importance Sampling, Large Deviations, and Differential Games[J]. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 2004, 76(06): 481–508.
- [5] SAKYI-YEBOAH E, ASIEDU L, DOKU-AMPONSAH K. Local Large Deviation Principle, Large Deviation Principle and Information Theory for the Signal-to-interference-plus-noise Ratio Graph Models[J]. *Journal of Information and Optimization Sciences*, 2021, 42(01): 249–273.
- [6] DUPUIS P, ELLIS R S. A Weak Convergence Approach to the Theory of Large Deviations[M]. Hoboken: John Wiley and Sons, 2011.
- [7] BUDHIRAJA A, CHEN J, DUPUIS P. Large Deviations for Stochastic Partial Differential Equations Driven by a Poisson Random Measure[J]. *Stochastic Processes and their Applications*, 2013, 123(02): 523–560.
- [8] LI Y. Large Deviation Principle for the Mean Reflected Stochastic Differential Equation with Jumps[J]. *Journal of Inequalities and Applications*, 2018: 1–15.
- [9] HASEENA A, SUVINTHRA M, ANNAPOORANI N. Large Deviations for Stochastic Integrodifferential Equations of the Itô Type with Multiple Randomness[J]. *Filomat*, 2018, 32(02): 473–487.
- [10] BUDHIRAJA A, SONG X. Large Deviation Principles for Stochastic Dynamical Systems with a Fractional Brownian Noise[J]. arXiv preprint arXiv, 2006, 07683, 2020.
- [11] HONG W, LI S, LIU W. Large Deviation Principle for McKean–vlasov Quasilinear Stochastic Evolution Equations[J]. *Applied Mathematics and Optimization*, 2021, 84(01): 1119–1147.
- [12] YANG J, XIANG Z, ZHAI J. A Small Time Large Deviation Principle for Stochastic Differential Delay Equations[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2023, 143: 108662.
- [13] WANG J, YANG H, ZHAI J, et al. Large Deviation Principles for SDEs Under Locally Weak Monotonicity Conditions[J]. *Bernoulli*, 2024, 30(01): 332–345.
- [14] JIN D C, CHEN Z H, ZHOU T. Large Deviations Principle for Stochastic Delay Differential Equations with Super-linearly Growing Coefficients[J]. *Frontiers of Mathematics*, 2022: 1–22.
- [15] SUVINTHRA M, BALACHANDRAN K, LIZZY R M. Large Deviations for Stochastic Fractional Integrodifferential Equations[J]. *AIMS Mathematics*, 2017, 2(02): 348–364.
- [16] SIVA RANJANI A, SUVINTHRA M, BALACHANDRAN K, et al. Analysis of Stochastic Neutral Fractional Functional Differential Equations[J]. *Boundary Value Problems*, 2022, (01): 1–26.
- [17] RANJANI A S, SUVINTHRA M. Large Deviations for Stochastic Fractional Pantograph Differential Equation[J]. *International Journal of Dynamics and Control*, 2024, 12(01): 136–147.
- [18] MO C, LUO J. Large Deviations for Stochastic Differential Delay Equations[J]. *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 2013, 80: 202–210.
- [19] VARADHAN S R. Large Deviations and Applications[M]. Philadelphia: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1984.
- [20] FURATI K M, KASSIM M D. Existence and Uniqueness for a Problem Involving Hilfer Fractional Derivative[J]. *Computers and Mathematics with Applications*, 2012, 64(06): 1616–1626.
- [21] AHMED H M, ZHU Q. The Averaging Principle of Hilfer Fractional Stochastic Delay Differential Equations with Poisson Jumps[J]. *Applied Mathematics Letters*, 2021, 112: 1–7.
- [22] BUDHIRAJA A, DUPUIS P. A Variational Representation for Positive Functionals of Infinite Dimensional Brownian Motion[J]. *Probability and Mathematical Statistics—wroclaw University*, 2000, 20(01): 39–61.
- [23] 许佳, 钟守铭. Gronwall不等式的推广及其在分数阶微分方程中的应用[J]. *西华大学学报*, 2012, 31(05): 62–64.
- [24] MAO X. Stochastic Differential Equations and Applications[M]. Elsevier: Amsterdam, The Netherlands, 2007.

(下转第98页)

Proximal ADMMs for Multi-block Separable Convex Optimizations and Convergences

LUO Xiu, WANG Xiang-mei*, LIAO Chun-fang

(College of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang, Guizhou, 550025, China)

Abstract: The Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM) is one of the important methods for solving two-block separable convex optimization problems and has made significant progress in recent years. Recently, Wang et al. proposed a Twisted version of the proximal Alternating Direction Method of Multipliers (TADMM) to solve multi-block separable problems (involving three or more blocks). Building on this work, the present study introduces two new TADMM variants, and systematically analyzes their convergence behaviors and iteration complexities. Finally, these algorithms are implemented to solve LASSO models in the handwritten digit recognition problems. Numerical experiments confirm the convergence of all three methods (the original TADMM and the two proposed variants) and further demonstrate the first variant proposed herein outperforms the other two by a significant margin.

Keywords: Separable convex optimization; Augmented Lagrangian function; Proximal ADMM; Convergence; Handwritten digit recognition problem

(上接第 84 页)

Large Deviation Principle of Hilfer Fractional Stochastic Delay Differential Equation

CHEN Juan, GU Hai-bo*, YAN Yu-tao

(College of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi, Xinjiang, 830017, China)

Abstract: This paper investigates the Large Deviation Principle (LDP) for a class of Hilfer fractional stochastic delay differential equations with multiplicative noise. Based on the equivalence between the LDP and the Laplace principle, the weak convergence method is employed to establish the LDP for such equations by verifying the compactness of the skeleton equation and the convergence of the perturbed system. A financial market model is presented as an example, and numerical simulations are conducted to illustrate how the LDP can be used to analyze the asymptotic behavior of the system under small noise perturbations, thereby validating the theoretical results.

Keywords: Fractional calculus; Stochastic differential equation; Large Deviation Principle; Weak convergence