第43卷　第3期　《新疆师范大学学报》(自然科学版)　Vol.43,No.3
2024年9月　Journal of Xinjiang Normal University　Sept. 2024
(Natural Sciences Edition)

给定点连通度的图的补图的无符号拉普拉斯谱半径

李　铿,邱　欢,张维娟,王国平*
(新疆师范大学 数学科学学院,新疆 乌鲁木齐 830017)

摘　要:假设 G 是一个具有点集 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 和边集 $E(G)$ 的连通简单图,矩阵 $Q(G)=D(G)+A(G)$ 被称为图 G 的无符号拉普拉斯矩阵,其中 $D(G)$ 和 $A(G)$ 分别是图 G 的度对角矩阵和邻接矩阵。称矩阵 $Q(G)$ 的最大特征值为图 G 的无符号拉普拉斯谱半径。图 G 的补图记为 $G^c=\left(V\left(G^c\right),E\left(G^c\right)\right)$,这里 $V\left(G^c\right)=V(G)$ 和 $E\left(G^c\right)=\{xy\,|\,x,y\in V(G),xy\notin E(G)\}$. 文章在给定点连通度且直径大于3的图的所有补图中,确定了无符号拉普拉斯谱半径达到最小时的唯一图。

关键词:无符号拉普拉斯矩阵;无符号拉普拉斯谱半径;补图;点连通度

中图分类号:O157.5　　**文献标识码:**A　　**文章编号:**1008-9659(2024)03-0064-05

假设 G 是一个具有点集 $V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 和边集 $E(G)$ 的连通简单图,图 G 的邻接矩阵是 $A(G)=(a_{ij})_{n\times n}$,其中,如果 v_i 相邻于 v_j,那么 $a_{ij}=1$,否则 $a_{ij}=0$. 若两条边存在一个公共顶点,则称这两条边是相邻的。图 G 中与顶点 v_i 相关联的边的数目称为顶点 v_i 的度,记作 $d_G(v_i)$. 设 $D(G)=\{d_G(v_1),d_G(v_2),\cdots,d_G(v_n)\}$ 是图 G 的度对角矩阵,矩阵 $Q(G)=D(G)+A(G)$ 被称为图 G 的无符号拉普拉斯矩阵。众所周知,$Q(G)$ 是非负的、对称的半正定矩阵,因此它所有的特征值都是实数,并且可以按从大到小进行排序为

$$q_1(G)\geqslant q_2(G)\geqslant\cdots\geqslant q_n(G)$$

其中最大的特征值 $q_1(G)$ 被称为图 G 的无符号拉普拉斯谱半径。

关于图的无符号拉普拉斯谱半径有很多研究。Fan等人在所有具有给定悬挂点数的图中,确定了具有最大的无符号拉普拉斯谱半径的唯一图[1]。Yu在所有具有给定匹配数的图中,刻画了具有最大的无符号拉普拉斯谱半径的极图[2]。Zhu在所有具有给定周长的图中,获得了无符号拉普拉斯谱半径达到最大时的唯一图[3]。Zhu在所有具有给定割点的图中,确定了无符号拉普拉斯谱半径达到最大时的唯一图[4]。Li等人在所有具有给定某些独立数的连通图中,刻画了无符号拉普拉斯谱半径达到最小时的极图[5]。Xing等人在所有具有固定独立数的图中,确定了无符号拉普拉斯谱半径达到最大时的极图[6]。Cui等人利用度序列给出了连通简单图的无符号拉普拉斯谱半径的一个上确界[7]。更多关于图的无符号拉普拉斯谱半径的相关结论可参考文献[8-14]。

G 的补图记为 $G^c=\left(V\left(G^c\right),E\left(G^c\right)\right)$,这里 $V\left(G^c\right)=V(G)$ 和 $E\left(G^c\right)=\{xy\,|\,x,y\in V(G),xy\notin E(G)\}$. 关于补图的相关谱的谱半径的研究相对较少。Liu等人在所有单圈图的补图中,确定了谱半径达到最大时的极图[15]。Lin等人在所有树的补图里,分别刻画出了距离谱半径达到最大和最小时的极图[16]。Chen等人在所有直径大于3的图的补图中,分别描述出了距离谱半径达到最大和最小时的极图[17],在所有给定2个悬挂点的图的补图中,分别确定了距离谱半径达到最大和最小时的极图[18]。Li等人分别在单圈图的补图和树的补

[收稿日期]2023-11-03　　[修回日期]2024-01-11
[基金项目]新疆维吾尔自治区自然科学基金资助项目(2023D01A38)。
[作者简介]李　铿(1998-),男,硕士研究生,主要从事图谱理论方面研究,E-mail:2641016653@qq.com.
*[通讯作者]王国平(1965-),男,教授,主要从事图谱理论方面研究,E-mail:xj.wgp@163.com.

图中，给出了距离无符号拉普拉斯谱半径达到最大时的极图[19]。Qin等人在所有单圈图的补图中，确定了距离谱半径达到最大时的极图[20]。

图G的点连通度是从图G中删除最少的顶点使得图G不连通时的最小顶点数。Ye等人在所有具有给定点连通度或者边连通度的图中，刻画了无符号拉普拉斯谱半径达到最大时的极图，并且还讨论了具有固定连通度的图的最小无符号拉普拉斯谱半径[14]。文章在具有给定点连通度且直径大于3的图的所有补图中，确定了无符号拉普拉斯谱半径达到最小时的唯一图。

1　预备知识

设J_n和I_n分别是各项为1的n阶矩阵和n阶单位矩阵。假设G是一个具有点集$V(G)=\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$的图。注$D(G)+D(G^c)=(n-1)I_n$和$A(G)+A(G^c)=J_n-I_n$，那么容易得到

$$Q(G^c)=(n-2)I_n+J_n-Q(G) \tag{1}$$

设$x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}^T\in R^n$是一个向量，其中$x(v_i)=x_i(1\leqslant i\leqslant n)$. 因此有

$$x^TQ(G)x=\sum_{uv\in E(G)}\left(x(u)+x(v)\right)^2 \tag{2}$$

x是$Q(G)$关于特征值q的一个特征向量当且仅当$x\neq 0$和每一个顶点$v\in V(G)$都满足特征方程

$$\left(q-d_G(v)\right)x(v)=\sum_{u\in N_G(v)}x(u) \tag{3}$$

其中，$N_G(v)$记为顶点v在图G中的邻点。

引理1（Rayleigh-Ritz定理）　设A和$\lambda(A)$分别是一个n阶的实对称矩阵和矩阵A的最小特征值，令$x=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}^T\in R^n$是一个向量，那么有

$$\lambda(A)\leqslant\min_{x\in R^n,\ \|x\|\neq 0}\frac{x^TAx}{x^Tx}$$

等式成立当且仅当x是关于$\lambda(A)$的一个特征向量。

设v是图G的一个顶点，记$G-v$是从图G中删除顶点v以及与其相关联的边之后的图。

引理2[21]　设G是一个n阶的图和$v\in V(G)$. 那么对于每一个$i=1,2,\cdots,n-1$，有

$$q_{i+1}(G)-1\leqslant q_i(G-v)\leqslant q_i(G)$$

右边等式成立，当且仅当v是一个孤立点。

引理3　假设G和G^*分别是一个至少包含一条边的n阶的图和从图G里删除一条边之后的图。那么有

(i)如果G^c是连通的，那么$q_1(G^{*c})>q_1(G^c)$；

(ii)如果G^c是不连通的，那么$q_1(G^{*c})\geqslant q_1(G^c)$.

证明　(i)由于G^c是一个连通图，令$x\in R^n$是矩阵$Q(G^c)$关于$q_1(G^c)$的一个单位Perron向量。也就是说，向量x每一个分量都是正数，并且向量$\|x\|=1$. 根据方程(1)和方程(2)，有

$$q_1(G^c)=x^TQ(G^c)x=x^T\left((n-2)I_n+J_n\right)x-x^TQ(G)x<x^T\left((n-2)I_n+J_n\right)x-x^TQ(G^*)x=x^TQ(G^{*c})x$$

根据引理1（Rayleigh-Ritz定理），可得到$q_1(G^{*c})\geqslant x^TQ(G^{*c})x$，因此$q_1(G^{*c})>q_1(G^c)$.

(ii)结论可以参照(i)类似证明。

2　主要结论

记$K_{m,n}$是具有两个顶点的集合，大小分别为m和n的完全二部图，其中$1\leqslant m\leqslant n$. 设H_1和H_2是两个顶点不相交的图。记$H_1\cup H_2$是H_1和H_2两个图的顶点不交的不交并集。也就是说，图$H_1\cup H_2$有两个连通分支，分别为H_1和H_2. 对于整数$k\geqslant 1$，记kK_1是k个孤立点。

假设G是一个具有给定点连通度k的n阶连通简单图，令U是图G的最小点割，那么$|U|=k,1\leqslant k\leqslant n-2$. 设$G_1$和$G_2$分别是$G-U$所有的连通分支中顶点数最少的那个连通分支和除$G_1$以外所有的连通分支的集

合。令 $V(G_1)=a$ 和 $V(G_1)=b$,那么 $a+b+k=n$. 首先分别连接在 U、$V(G_1)$ 和 $V(G_2)$ 中不相邻的顶点,再连接 U 和 $V(G_1)$ 所有的顶点对,最后连接 U 和 $V(G_2)$ 中所有的顶点对,得到一个图 $B_1(a,k,b)$. 显然地,图 $B_1(a,k,b)=K_{a,b}\cup kK_1$ 是不连通的。

从上述图 $B_1(a,k,b)$ 的构造和引理3(ii)可知,$q_1(G^c)\geqslant q_1\left(B_1(a,k,b)^c\right)=q_1\left(K_{a,b}\cup kK_1\right)=n-k$.

定理1 假设 G 是一个具有给定点连通度 k 的 n 阶连通简单图,其中 $1\leqslant k\leqslant n-2$. 那么 $q_1(G^c)\geqslant q_1\left(K_{a,b}\cup kK_1\right)=n-k$,其中 $a>0,b>0,a+b+k=n$.

正如以上所讨论的,得到的极图是一个不连通的图。下面将讨论极图是连通时的情况。

图 G 的直径是在图中所有顶点对中距离最远的那对顶点所对应的距离,记为 $d(G)$. 如果图 G 的两个顶点 u 和 v 相邻,记为 $u\sim v$,否则记为 $u\nsim v$.

引理4 假设 G 是一个简单图,并且 $d(G)\geqslant 3$,那么 G^c 是连通的。

证明 设 u 和 v 是图 G 的两个顶点。

假设 $d(G)>3$,如果 $u\sim v$,那么一定存在一个顶点 $w\in V(G)$,既不与 u 相邻,也不与 v 相邻。因此在图 G^c 中,存在一条二长路 $P_2=uwv$. 因此假设 $u\nsim v$,那么在图 G^c 中就会存在一条边 $uw\in E(G^c)$.

假设 $d(G)=3$. 如果 $u\sim v$,那么一定存在两个事实。

当图 G 的所有顶点要么和 u 相邻,要么和 v 相邻时,那么在图 G 中一定存在两个顶点 $u_1,v_1\in V(G)$ 使得 $u_1\sim u,v_1\sim v,u_1\nsim v$ 和 $v_1\nsim u$. 因此在图 G^c 中,存在一条三长路 $P_3=uv_1u_1v$.

当图 G 中存在一个顶点 $w_1\in V(G)$,使得 $w_1\nsim v$ 和 $w_1\nsim u$,那么在图 G^c 中一定存在一条二长路 $P_2=uw_1v$. 因此假设 $u\nsim v$. 那么在图 G^c 中就会存在一条边 $uw\in E(G^c)$.

通过上述讨论可知,在图 G^c 中的任意两个顶点都存在一条路与之相连,这说明 G^c 是连通的。

假设 G 是一个具有给定点连通度 k 的 n 阶连通简单图,令 U 是图 G 的最小点割,那么 $|U|=k$,如果 $d(G)>3$,那么 $1\leqslant k\leqslant\dfrac{n-2}{3}$,并且一定存在一个顶点 $v\in V(G)$ 与 U 中的每个顶点都不相邻。令 G_3 是 $G-U$ 的连通分支中包含顶点 v 的那个连通分支,设 $G_4(\neq G_3)$ 和 G_5 分别是 $G-U$ 的连通分支中顶点数最少的那个连通分支和除 G_4 之外所有连通分支的集合。显然地,$G_3\subseteq G_5$. 令 $V(G_4)=s$ 和 $V(G_5)=t$,那么 $s+t+k=n$. 首先分别连接在 U、$V(G_4)$ 和 $V(G_5)$ 中不相邻的顶点,再连接 U 和 $V(G_4)$ 所有的顶点对,最后连接 U 和 $V(G_5)$ 中除顶点 v 外所有的顶点对,获得一个图 $B_2(s,k,t-1)$. 显然地,$d\left(B_2(s,k,t-1)\right)=3$. 通过引理4可知,图 $B_2^c(s,k,t-1)$ 是连通的。

从 $B_2^c(s,k,t-1)$ 中删除 U,可获得一个完全二部图 $K_{s,t}$. 通过引理2可知,$q_1\left(K_{s,t}\right)<q_1\left(B_2^c(s,k,t-1)\right)$. 因为 $q_1\left(K_{s,t}\right)=s+t$,所以 $q_1\left(B_2^c(s,k,t-1)\right)>s+t$.

定理2 假设 G 是一个具有给定点连通度 k 的 n 阶连通简单图,并且 $d(G)>3$,那么 $q_1(G^c)>q_1\left(B_2^c(1,k,n-k-1)\right)$,其中 $1\leqslant k\leqslant\dfrac{n-2}{3}$.

证明 根据图 $B_2(s,k,t-1)$ 的构造和引理3(i),有 $q_1(G^c)>q_1\left(B_2^c(s,k,t-1)\right)$. 令 $x\in R^n$ 是矩阵 $Q\left(B_2^c(s,k,t-1)\right)$ 关于 $q_1\left(B_2^c(s,k,t-1)\right)$ 的一个单位Perron向量。根据图 $B_2^c(s,k,t-1)$ 结构的对称性,在 $V(G_4)$ 中的所有顶点在向量 x 中对应的分量都为 x_1,在 U 中的所有顶点在向量 x 中对应的分量都为 x_2 和在 $V(G_5)\setminus\{u\}$ 中的所有顶点在向量 x 中对应的分量都为 x_3. 令 $x(v)=x_4$,设 $q=q_1\left(B_2^c(s,k,t-1)\right)$. 那么根据式(3)有

$$\begin{cases}qx_1=tx_1+(t-1)x_3+x_4\\qx_2=x_2+x_4\\qx_3=sx_1+sx_3\\qx_4=sx_1+kx_2+(s+k)x_4\end{cases}$$

将上述方程组转化成一个矩阵方程 $\left(qI_4 - Q_{s,t}\right)x' = 0$，其中 $x' = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$，

$$Q_{s,t} = \begin{pmatrix} t & 0 & t-1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ s & 0 & s & 0 \\ s & k & 0 & s+k \end{pmatrix}$$

设 $\phi_{s,t}(q) = det\left(qI_4 - Q_{s,t}\right)$，那么

$$\phi_{s,t}(q) = q^4 + (-2s - k - t - 1)q^3 + (ks + kt + s + st + 2s + t)q^2 + (-ks - s - st)q$$

因此，可以得到

$$\phi_{s,t}(q) - \phi_{s+1,t-1}(q) = q(q^2 - qs - qt - q + k + s + t)$$

根据上面的方程，可以获得 $\phi_{s,t}(q) - \phi_{s+1,t-1}(q) = 0$ 的最大根是

$$\theta = \frac{s + t + 1 + \sqrt{s^2 + 2st + t^2 - 4k - 2s - 2t + 1}}{2}$$

注　$q_1\left(B_2^c(s, k, t-1)\right) > s + t$ 和 $k = n - s - t$，通过计算有

$$\theta - q_1\left(B_2^c(s, k, t-1)\right) < \theta - (s + t) < 0$$

这说明 $\phi_{s,t}(q) - \phi_{s+1,t-1}(q) > 0$，从而 $q_1\left(B_2^c(s, k, t-1)\right) < q_1\left(B_2^c(s+1, k, t-1)\right)$。因此有 $q_1\left(B_2^c(s, k, t-1)\right) \geqslant q_1\left(B_2^c(1, k, n-k-1)\right)$ 根据上述讨论，有 $q_1(G^c) > q_1\left(B_2^c(1, k, n-k-1)\right)$。$B_2^c(1, k, n-k-1)$ 的无符号拉普拉斯谱半径 q_1 是如下等式的最大根。

$$q^3 - (n-2)q^2 - (k - kn + 2k - 2n - 1)q - n = 0$$

参考文献：

[1] FAN Y Z, YANG D. The Signless Laplacian Spectral Radius of Graphs with Given Number of Pendant Vertices[J]. Graphs and Combinatorics, 2009, 25(03): 291-298.

[2] YU G H. On the Maximal Signless Laplacian Spectral Radius of Graphs with Given Matching Number[J]. Proceedings of the Japan Academy. Series A Mathematical sciences, 2008, 84(09): 163-166.

[3] ZHU Z X. The Signless Laplacian Spectral Radius of Bicyclic Graphs with a Given Girth[J]. The Electronic Journal of Linear Algebra, 2011, 22: 378-388.

[4] ZHU B X. On the Signless Laplacian Spectral Radius of Graphs with Cut Vertices[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 433(05): 928-933.

[5] LI R L, SHI J S. The Minimum Signless Laplacian Spectral Radius of Graphs with Given Independence Number[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 433(8-10): 1614-1622.

[6] XING R D, ZHOU B. Laplacian and Signless Laplacian Spectral Radii of Graphs with Fixed Domination Number[J]. Mathematische Nachrichten, 2015, 288(04): 476-480.

[7] CUI S Y, TIAN G X, GUO J J. A Sharp Upper Bound on the Signless Laplacian Spectral Radius of Graphs[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2013, 439(08): 2442-2447.

[8] ZHOU B. Signless Laplacian Spectral Radius and Hamiltonicity[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 432(02-03): 566-570.

[9] ZHANG X D. The Signless Laplacian Spectral Radius of Graphs with Given Degree Sequences[J]. Discrete Applied Mathematics, 2009, 157(13): 2928-2937.

[10] ZHAO Y H, HUANG X Y, GUO H T. The Signless Laplacian Spectral Radius of Graphs with No Intersecting Triangles[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2021, 618: 12-21.

[11] CHEN W W, WANG B, ZHAI M Q. Signless Laplacian Spectral Radius of Graphs without Short Cycles or Long Cycles[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2022, 645: 123-136.

[12] YU G L, WU Y R, SHU J R. Signless Laplacian Spectral Radii of Graphs with Given Chromatic Number[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2011, 435(08): 1813-1822.

[13] CHANG T J, TAM B S. Graphs with Maximal Signless Laplacian Spectral Radius[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010,

432(07):1708-1733.

[14] YE M L, FAN Y Z, WANG H F. Maximizing Signless Laplacian or Adjacency Spectral Radius of Graphs Subject to Fixed Connectivity[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2010, 433(06):1180-1186.

[15] LIU J, ZHANG Z. Spectral Radius of the Complement of Unicyclic Graphs[J]. Journal of East China Normal University (Natural Science), 2010, (05):14.

[16] LIN H Q, DRURY S. The Distance Spectrum of Complements of Trees[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2017, 530: 185-201.

[17] CHEN X, WANG G P. The Distance Spectrum of the Complements of Graphs of Diameter Greater Than Three[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2023, 54(04):959-965.

[18] CHEN X, WANG G P. The Distance Spectrum of the Complements of Graphs with Two Pendent Vertices[J]. Indian Journal of Pure and Applied Mathematics, 2023, 54(04):1069-1080.

[19] LI Y J, QIN R, LI D. On Distance Signless Laplacian Spectrum of the Complements of Unicyclic Graphs and Trees[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2021, 631:235-253.

[20] QIN R, LI D, CHEN Y Y, et al. The Distance Eigenvalues of the Complements of Unicyclic Graphs[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2020, 598:49-67.

[21] WANG J F, BELARDO F. A Note on the Signless Laplacian Eigenvalues of Graphs[J]. Linear Algebra and Its Applications, 2011, 435(10):2585-2590.

The Signless Laplacian Spectral Radius of the Complements of Graphs with Given Vertex Connectivity

LI Keng, QIU Huan, ZHANG Wei-juan, WANG Guo-ping*

(*School of Mathematical Sciences, Xinjiang Normal University, Urumqi, Xinjiang, 830017, China*)

Abstract: Suppose that G is a connected simple graph with the vertex set $V(G)=\{v_1, v_2, \cdots, v_n\}$ and the edge set $E(G)$, the matrix $Q(G)=D(G)+A(G)$ is called the signless Laplacian matrix of the graph G, where $D(G)$ and $A(G)$ are the degree diagonal matrix and the adjacency matrix of G, respectively, the maximum eigenvalue of matrix $Q(G)$ is called the signless Laplacian spectral radius of graph G, the complements of G are denoted by $G^c=\left(V\left(G^c\right), E\left(G^c\right)\right)$, where $V\left(G^c\right)=V(G)$ and $E\left(G^c\right)=\{xy \mid x, y \in V(G), xy \notin E(G)\}$. In this paper, we the unique graph is determined that whose signless Laplacian spectral radius is minimum among all complements of graphs with given vertex connectivity and diameter greater than three.

Keywords: Signless Laplacian matrix; Signless Laplacian spectral radius; Complements of graphs; Vertex connectivity