第43卷　第3期　《新疆师范大学学报》(自然科学版)　Vol.43,No.3
2024年9月　Journal of Xinjiang Normal University　Sept. 2024
(Natural Sciences Edition)

Fermat型复微分差分方程的整函数解

龚翌晖,杨　祺*
(新疆师范大学 数学科学学院,新疆 乌鲁木齐 830054)

摘　要: 文章利用复微分方程理论和复差分方程理论研究了形式为$(\mu f(z)+\lambda f'(z))^2+f(z)^2=P(z)$的复微分方程和形式为$(\mu f(z)+\lambda f'(z))^2+f(z+c)^2=P(z)$的复微分-差分方程的任意整函数解的存在形式。首先,用Weierstrass因式分解定理将两个方程进行分解,计算出$f(z)$和$\mu f(z)+\lambda f'(z)$的具体形式;其次,对因式分解后产生的指数$h(z)$进行讨论,分为$h(z)$为常数和$h(z)$为非常数整函数两种情形;最后,研究每一种情形下整函数解中各个变量之间的关系。文章得到了两个关于Fermat型方程的整函数解的存在形式,在一定范围内推广和改进了前人的结论。

关键词: 复微分方程;复差分方程;Nevanlinna理论;整函数解

中图分类号: O174.52　　**文献标识码:** A　　**文章编号:** 1008-9659(2024)03-0069-06

假定熟悉Nevanlinna值分布理论中的记号[1-4],例如亚纯函数$f(z)$的特征函数记为$T(r,f)$,$f(z)$的极点的计数函数记为$N(r,f)$. 1966年Gross[5]在前人研究的基础上证得Fermat型方程$f(z)^2+g(z)^2=1$的整函数解必型如$f(z)=\sin(h(z))$和$g(z)=\cos(h(z))$,其中$h(z)$是整函数。此后几十年,在广大数学工作者的探索下,关于Fermat型方程的解的问题得到了具有深远意义的推广。Yang等人[6]和Liu等人[7]分别于2004年和2012年考虑微分形式和差分形式的Fermat型方程,研究了Fermat型复微分-差分方程的解的形式和解的性质。近年来,复微分-差分方程解的存在性和存在形式成为许多数学工作者研究的热点问题,并取得了丰富的研究成果[8-14]。但是,在2020年以前大多数学者得到的Fermat型复微分-差分方程的整函数解是有限级解[15-17]。

2020年,徐玲等人[18]考虑Fermat型复微分差分方程的整函数解,研究了方程

$$f'(z)^2+f(z)^2=P(z) \tag{1}$$

$$f(z)^2+f(z+c)^2=P(z) \tag{2}$$

$$f'(z)^2+f(z+c)^2=P(z) \tag{3}$$

的任意整函数解的存在形式,证明了以下三个定理。

定理1　设$f(z)$是复微分方程(1)的任意整函数解,且$P(z)$为非零多项式,则必有解$f(z)$满足

$$f(z)=\frac{P_1(z)e^{h(z)}-P_2(z)e^{-h(z)}}{2i}$$

其中$P(z)=P_1(z)P_2(z)$,$P_1(z)$和$P_2(z)$是多项式,且$P(z)$与$h(z)$仅满足以下两种情形之一:

(1)当$h(z)$为常数时,则$[P_1'(z)-iP_1(z)]e^{2h}\equiv P_2'(z)+iP_2(z)$;

(2)当$h(z)$为非常数的整函数时,则$P(z)$,$P_1(z)$,$P_2(z)$恒为常数,且$h(z)\equiv iz+A$,这里A为常数。

定理2　设$f(z)$是复差分方程(2)的任意整函数解,且$P(z)$为非零多项式,c为非零复数,则必有解$f(z)$满足

$$f(z)=\frac{P_1(z)e^{h(z)}+P_2(z)e^{-h(z)}}{2}$$

[收稿日期]2023-12-27　　[修回日期]2024-01-12
[基金项目]国家自然科学基金项目(11961068)。
[作者简介]龚翌晖(1999-),男,硕士研究生,主要从事复分析方面研究,E-mail:2556288190@qq.com.
*[通讯作者]杨　祺(1979-),女,教授,主要从事复分析方面研究,E-mail:yangqi_8138@126.com.

其中$P(z)=P_1(z)P_2(z)$,这里$P_1(z)$和$P_2(z)$是多项式,且$P(z)$与$h(z)$仅满足以下两种情形之一:

(1)当$h(z)$为常数时,则$iP_2(z-c)-P_2(z)\equiv[P_1(z)+iP_1(z-c)]e^{2h}$;

(2)当$h(z)$为非常数的整函数时,则$P(z)$恒为常数,且$h(z)$满足$e^{h(z-c)+h(z)}\equiv i\dfrac{P_2}{P_1}$或$e^{h(z)-h(z-c)}\equiv -i$.

定理3 设$f(z)$是复微分-差分方程(3)的任意整函数解,且$P(z)$为非零多项式,c为非零复数,则必有解$f(z)$满足

$$f(z)=\frac{P_1(z-c)e^{h(z-c)}+P_2(z-c)e^{-h(z-c)}}{2i}$$

其中$P(z)=P_1(z)P_2(z)$,这里$P_1(z)$和$P_2(z)$是多项式,且$P(z)$与$h(z)$仅满足以下两种情形之一:

(1)当$h(z)$为常数时,则$[P_1'(z)-iP_1(z+c)]e^{2h}\equiv P_2'(z)+iP_2(z+c)$;

(2)当$h(z)$为非常数的整函数时,$h(z)\equiv\pm iz+B$,$c=k\pi$,这里B为常数,k为任意整数。

2022年,方成鸿等人[19]研究复微分-差分方程

$$[\lambda f'(z)+\mu f(z)]^2+[\alpha f(z+c)]^2=1$$

的有限级整函数解,在$\lambda\neq 0,\alpha\neq 0$的情况下得到下述定理:

定理4 设$f(z)$是复微分-差分方程$[\lambda f'(z)+\mu f(z)]^2+[\alpha f(z+c)]^2=1$的有限级整函数解,则

(1)若$f(z)$是有限级超越整函数,那么

$$f(z)=\frac{e^{az+b}}{2(\mu+\lambda a)}+\frac{e^{-az-b}}{2(\mu-\lambda a)}$$

其中$a=\dfrac{\pm\sqrt{\mu^2-\alpha^2}}{\lambda}$,$c=\dfrac{1}{a}\left(\ln\dfrac{\lambda a+\mu}{\alpha i}+2k\pi i\right)$,$b$是常数,$k$是整数;

(2)若$f(z)$是多项式,那么只有常数解$f(z)=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\mu^2+\alpha^2}}$.

1 主要结论

结合上述定理,考虑如下形式的Fermat型复微分差分方程的任意整函数解的存在形式:

$$(\mu f(z)+\lambda f'(z))^2+f(z)^2=P(z)$$

$$(\mu f(z)+\lambda f'(z))^2+f(z+c)^2=P(z)$$

其中λ,c为非零常数,μ为常数,得到定理5和定理6.

定理5 设$P(z)$为非零多项式,则方程$(\mu f(z)+\lambda f'(z))^2+f(z)^2=P(z)$的任意整函数解必形如

$$f(z)=\frac{P_1(z)e^{h(z)}-P_2(z)e^{-h(z)}}{2i}$$

其中$P(z)=P_1(z)P_2(z)$,$P_1(z)$和$P_2(z)$是非零多项式,且$P(z)$与$h(z)$满足下述两种情形:

(1)当$h(z)$是常数时,则$[(i-\mu)P_1(z)-\lambda P_1'(z)]e^{2h}=(i+\mu)P_2(z)-\lambda P_2'(z)$;

(2)当$h(z)$为非常数整函数时,$P(z)$恒为常数,且$\mu=0$,$h(z)=\dfrac{i}{\lambda}z+B$,$B$为常数。

定理6 设$P(z)$为非零多项式,则方程$(\mu f(z)+\lambda f'(z))^2+f(z+c)^2=P(z)$的任意整函数解必形如

$$f(z)=\frac{P_1(z-c)e^{h(z-c)}-P_2(z-c)e^{-h(z-c)}}{2i}$$

其中$P(z)=P_1(z)P_2(z)$,$P_1(z)$和$P_2(z)$是非零多项式,且$P(z)$与$h(z)$满足下述两种情形:

(1)当$h(z)$为常数时,则

$$[\lambda P_1'(z)+\mu P_1(z)-iP_1(z+c)]e^{2h}=iP_2(z+c)+\mu P_2(z)+\lambda P_2'(z);$$

(2)当$h(z)$为非常数整函数时,则

(i)若$h(z)=\dfrac{\sqrt{\mu^2-1}}{\lambda}z+b$,那么$c=\dfrac{\lambda\ln(-i\sqrt{\mu^2-1}-i\mu)+2\lambda k\pi i}{\sqrt{\mu^2-1}}$,其中$b$为常数,$k$为整数;

(ii)若$h(z)=\dfrac{-\sqrt{\mu^2-1}}{\lambda}z+b$,那么$c=-\dfrac{\lambda\ln(i\sqrt{\mu^2-1}-i\mu)+2\lambda k\pi i}{\sqrt{\mu^2-1}}$,其中$b$为常数,$k$为整数。

注1 结合定理5和定理6，可以得到形式更加一般的复微分-差分方程

$$(\mu f(z)+\lambda f'(z))^2+(\alpha f(z+c)-\beta f(z))^2=P(z)$$

其中$\lambda(\neq 0),\mu,\alpha,\beta,c(\neq 0)$为常数。对此方程，当$\alpha=0,\beta=-1$时，即为文章定理5的结论；当$\alpha=1,\beta=0$时，即为定理6的结论。那么有一个问题，当$\alpha$和$\beta$都取非零常数时，该方程是否存在整函数解？假设：当系数λ,μ,α,β和常数c之间满足一定的代数关系时，方程存在有穷级超越整函数解。

2 主要引理

为了证明文章的结论，需要如下引理：

引理1[3] 假设$f(z)$为超越亚纯函数，且$h(z)$是非常数整函数，则$\lim\limits_{r\to\infty}\dfrac{T(r,f(h))}{T(r,h)}=\infty$.

引理2[3] 设$f(z)$为亚纯函数，$f_1(z)=f(az+b),a\neq 0$，则$f(z)$与$f_1(z)$具有相同的增长类。

引理3[3] 设$f_j(z)(j=1,2,3)$为复平面上的亚纯函数，$f_1(z)$为非常数，如果$\sum_{j=1}^{n}f_j(z)\equiv 1$，且

$$\sum_{j=1}^{3}N(r,\frac{1}{f_j})+2\sum_{j=1}^{3}\overline{N}(r,f_j)<(\lambda+o(1))T(r)$$

其中$\lambda<1,T(r)=\max\limits_{1\leqslant j\leqslant 3}T(r,f_j)$，则$f_2(z)\equiv 1$或$f_3(z)\equiv 1$.

引理4[16] 设A,c为非零常数，且$f(z)$为亚纯函数，则有$T(r,f)=o(T(r,e^{Af(z+c)}))$.

3 定理的证明

定理5的证明 显然方程$(\mu f(z)+\lambda f'(z))^2+f(z)^2=P(z)$可以改写为

$$\{[\mu f(z)+\lambda f'(z)]+if(z)\}\{[\mu f(z)+\lambda f'(z)]-if(z)\}=P(z)$$

根据Weierstrass因式分解定理，存在一个整函数$h(z)$使得

$$\begin{cases}[\mu f(z)+\lambda f'(z)]+if(z)=P_1(z)e^{h(z)}\\ [\mu f(z)+\lambda f'(z)]-if(z)=P_2(z)e^{-h(z)}\end{cases}$$

其中$P(z)\equiv P_1(z)P_2(z)$，$P_1(z)$与$P_2(z)$都是非零多项式。经简单计算可得

$$\begin{cases}\mu f(z)+\lambda f'(z)=\dfrac{P_1(z)e^{h(z)}+P_2(z)e^{-h(z)}}{2}\\ f(z)=\dfrac{P_1(z)e^{h(z)}-P_2(z)e^{-h(z)}}{2i}\end{cases} \tag{4}$$

所以有

$$\lambda f'(z)=\frac{[iP_1(z)-\mu P_1(z)]e^{h(z)}+[iP_2(z)+\mu P_2(z)]e^{-h(z)}}{2i} \tag{5}$$

由方程组(4)的第二式求导可得

$$f'(z)=\frac{[P_1'(z)+P_1(z)h'(z)]e^{h(z)}-[P_2'(z)-P_2(z)h'(z)]e^{-h(z)}}{2i} \tag{6}$$

所以结合式(5)和式(6)可以得到

$$[iP_1(z)-\mu P_1(z)-\lambda P_1'(z)-\lambda P_1(z)h'(z)]e^{2h(z)}=-iP_2(z)-\mu P_2(z)-\lambda P_2'(z)+\lambda P_2(z)h'(z) \tag{7}$$

下面分为两种情形。

情形1 $h(z)$为常数。此时$h'(z)\equiv 0$，因此有

$$[(i-\mu)P_1(z)-\lambda P_1'(z)]e^{2h}=-(i+\mu)P_2(z)-\lambda P_2'(z)$$

通过上式易知$\deg P_1(z)=\deg P_2(z)$.

情形2 $h(z)$为非常数整函数。此时$e^{2h(z)}$为超越整函数，所以由引理1可得

$$T(r,iP_1(z)-\mu P_1(z)-\lambda P_1'(z)-\lambda P_1(z)h'(z))=o(T(r,e^{2h(z)}))$$
$$T(r,-iP_2(z)-\mu P_2(z)-\lambda P_2'(z)+\lambda P_2(z)h'(z))=o(T(r,e^{2h(z)}))$$

再结合式(7)容易得到

$$\begin{cases}\lambda P_1'(z)+\mu P_1(z)+\lambda P_1(z)h'(z)-iP_1(z)\equiv 0\\ \lambda P_2'(z)+\mu P_2(z)-\lambda P_2(z)h'(z)+iP_2(z)\equiv 0\end{cases}$$

因此

$$h'(z)\equiv\frac{iP_1(z)-\lambda P_1'(z)-\mu P_1(z)}{\lambda P_1(z)}\equiv\frac{\lambda P_2'(z)+\mu P_2(z)+iP_2(z)}{\lambda P_2(z)} \tag{8}$$

经简单计算可得$\lambda P'(z)+2\mu P(z)\equiv 0$,即$P(z)=Ae^{\frac{-2\mu}{\lambda}z}$,$A$为常数。因为$P(z)$为多项式,所以必有$\mu=0$,此时$P(z)=A$,再结合式(8)即可得$h'(z)=\dfrac{i}{\lambda}$,积分后有$h(z)=\dfrac{i}{\lambda}z+B$,$B$为常数。

定理6的证明 方程$(\mu f(z)+\lambda f'(z))^2+f(z+c)^2=P(z)$可改写为

$$\{[\mu f(z)+\lambda f'(z)]+if(z+c)\}\{[\mu f(z)+\lambda f'(z)]-if(z+c)\}=P(z)$$

根据Weierstrass因式分解定理,存在一个整函数$h(z)$使得

$$\begin{cases}[\mu f(z)+\lambda f'(z)]+if(z+c)=P_1(z)e^{h(z)}\\ [\mu f(z)+\lambda f'(z)]-if(z+c)=P_2(z)e^{-h(z)}\end{cases}$$

其中$P(z)\equiv P_1(z)P_2(z)$,$P_1(z)$与$P_2(z)$都是非零多项式。经简单计算可得

$$\begin{cases}\mu f(z)+\lambda f'(z)=\dfrac{P_1(z)e^{h(z)}+P_2(z)e^{-h(z)}}{2}\\ f(z+c)=\dfrac{P_1(z)e^{h(z)}-P_2(z)e^{-h(z)}}{2i}\end{cases} \tag{9}$$

对方程组(9)的第一式进行差分平移可得

$$\mu f(z+c)+\lambda f'(z+c)=\frac{P_1(z+c)e^{h(z+c)}+P_2(z+c)e^{-h(z+c)}}{2} \tag{10}$$

对方程组(9)的第二式两边求导可得

$$f'(z+c)=\frac{[P_1'(z)+P_1(z)h'(z)]e^{h(z)}-[P_2'(z)-P_2(z)h'(z)]e^{-h(z)}}{2i}$$

结合方程组(9)的第二式和式(10)有

$$\lambda f'(z+c)=\frac{iP_1(z+c)e^{h(z+c)}+iP_2(z+c)e^{-h(z+c)}-\mu P_1(z)e^{h(z)}+\mu P_2(z)e^{-h(z)}}{2i}$$

由上面两个等式可以算出

$$\frac{-P_1(z+c)}{P_2(z+c)}e^{2h(z+c)}+\frac{\lambda P_1'(z)+\mu P_1(z)+\lambda P_1(z)h'(z)}{iP_2(z+c)}e^{h(z+c)+h(z)}+\frac{\lambda P_2(z)h'(z)-\mu P_2(z)-\lambda P_2'(z)}{iP_2(z+c)}e^{h(z+c)-h(z)}=1 \tag{11}$$

情形1 $h(z)$为常数。此时$h'(z)\equiv 0$,因此由式(11)可知

$$[\lambda P_1'(z)+\mu P_1(z)-iP_1(z+c)]e^{2h}=iP_2(z+c)+\mu P_2(z)+\lambda P_2'(z)$$

通过上式可知$\deg P_1(z)=\deg P_2(z)$.

情形2 $h(z)$为非常数整函数。此时$e^{2h(z)}$为超越整函数,根据引理4可知

$$T(r,h'(z))\leqslant 2T(r,h(z))+o(T(r,h(z)))=o(T(r,e^{2h(z+c)}))$$

所以有

$$\max\{T(r,\frac{-P_1(z+c)}{P_2(z+c)}),T(r,\frac{\lambda P_1'(z)+\mu P_1(z)+\lambda P_1(z)h'(z)}{iP_2(z+c)}),T(r,\frac{\lambda P_2(z)h'(z)-\mu P_2(z)-\lambda P_2'(z)}{iP_2(z+c)})\}=o(T(r,e^{2h(z+c)}))$$

令

$$f_1(z)=\frac{-P_1(z+c)}{P_2(z+c)}e^{2h(z+c)},\ f_2(z)=\frac{\lambda P_1'(z)+\mu P_1(z)+\lambda P_1(z)h'(z)}{iP_2(z+c)}e^{h(z+c)+h(z)}$$

$$f_3(z)=\frac{\lambda P_2(z)h'(z)-\mu P_2(z)-\lambda P_2'(z)}{iP_2(z+c)}e^{h(z+c)-h(z)}$$

若$\lambda P_1'(z)+\mu P_1(z)+\lambda P_1(z)h'(z)\equiv\lambda P_2(z)h'(z)-\mu P_2(z)-\lambda P_2'(z)\equiv 0$,则$f_1(z)=\dfrac{-P_1(z+c)}{P_2(z+c)}e^{2h(z+c)}\equiv 1$,又由$h(z)$为非常数可知$f_1(z)$是超越的,矛盾。若$\lambda P_1'(z)+\mu P_1(z)+\lambda P_1(z)h'(z)\equiv 0$,则$f_1(z)+f_3(z)\equiv 1$,在此情形下,结合引理2、引理4、Nevanlinna第二基本定理可知

$$T(r,f_1(z))\leqslant N(r,f_1(z))+N(r,\frac{1}{f_1(z)})+N(\frac{1}{f_1(z)-1})+o(T(r,f_1(z)))$$

$$\begin{aligned}
&\leqslant N(r,f_1(z)) + N(r,\frac{1}{f_1(z)}) + N(r,\frac{1}{f_3(z)}) + o(T(r,f_1(z)))\\
&\leqslant T(r,P_2(z+c)) + T(r,P_1(z+c)) + T(r,\frac{1}{f_3(z)}) + o(T(r,f_1(z)))\\
&\leqslant o(T(r,e^{2h(z+c)})) + o(T(r,e^{h(z+c)-h(z)})) + o(T(r,f_1(z)))\\
&\leqslant o(T(r,f_1(z)))
\end{aligned}$$

这是矛盾的。所以$\lambda P_1'(z)+\mu P_1(z)+\lambda P_1(z)h'(z)$和$\lambda P_2(z)h'(z)-\mu P_2(z)-\lambda P_2'(z)$不恒等于0. 因此结合式(11)和引理3可得$f_2(z)\equiv 1$或$f_3(z)\equiv 1$. 再分为两种情形。

情形2.1 $f_2\equiv 1$，此时必有$f_1(z)+f_3(z)\equiv 0$，所以

$$e^{h(z+c)+h(z)} \equiv \frac{iP_2(z+c)}{\lambda P_1'(z)+\mu P_1(z)+\lambda P_1(z)h'(z)} \equiv \frac{\lambda P_2(z)h'(z)-\mu P_2(z)-\lambda P_2'(z)}{iP_1(z+c)}$$

经简单计算可得

$$\begin{gathered}
\lambda^2 P_1'(z)P_2(z)h'(z) - \lambda^2 P_1(z)P_2'(z)h'(z) + \lambda^2 P_1(z)P_2(z)h'(z)^2 \equiv\\
\lambda^2 P_1'(z)P_2'(z) + \lambda\mu P_1'(z)P_2(z) + \lambda\mu P_1(z)P_2'(z) + \mu^2 P_1(z)P_2(z) - P_1(z+c)P_2(z+c)
\end{gathered}$$

对上式，如果$h(z)$是超越整函数，那么等式左边的特征函数为$2T(r,h')$，等式右边的特征函数等于$o(T(r,h'))$，这显然是矛盾的，所以$h(z)$一定是多项式，此时$e^{h(z+c)+h(z)}$是超越整函数。另一方面，由$e^{h(z+c)-h(z)} \equiv \dfrac{iP_2(z+c)}{\lambda P_1'(z)+\mu P_1(z)+\lambda P_1(z)h'(z)}$可知$e^{h(z+c)+h(z)}$是有理函数，矛盾。

情形2.2 $f_3\equiv 1$，此时必有$f_1(z)+f_2(z)\equiv 0$，所以

$$e^{h(z+c)-h(z)} \equiv \frac{iP_2(z+c)}{\lambda P_2(z)h'(z)-\mu P_2(z)-\lambda P_2'(z)} \equiv \frac{\lambda P_1'(z)+\mu P_1(z)+\lambda P_1(z)h'(z)}{iP_1(z+c)} \tag{12}$$

经简单计算可得

$$\begin{gathered}
-\lambda^2 P_1(z)P_2'(z)h'(z) + \lambda^2 P_1'(z)P_2(z)h'(z) + \lambda^2 P_1(z)P_2(z)h'(z)^2 \equiv\\
\lambda^2 P_1'(z)P_2'(z) + \lambda\mu P_1(z)P_2'(z) + \lambda\mu P_1'(z)P_2(z) + \mu^2 P_1(z)P_2(z) - P_1(z+c)P_2(z+c)
\end{gathered} \tag{13}$$

与情形2.1的讨论相似，可知$h(z)$不可能是超越的，所以$h(z)$一定是多项式。由式(12)有$e^{h(z-c)-h(z)}$是多项式，故$h(z+c)-h(z)$是常数多项式，那么$h(z)$是一次多项式。设$h(z)=az+b$，$a(\neq 0)$，b为常数。把$h(z)$代入式(13)可以得到

$$\begin{gathered}
a^2\lambda^2 P_1(z)P_2(z) + a\lambda^2 P_1'(z)P_2(z) - a\lambda^2 P_1(z)P_2'(z) \equiv\\
\lambda^2 P_1'(z)P_2'(z) + \lambda\mu P_1(z)P_2'(z) + \lambda\mu P_1'(z)P_2(z) + \mu^2 P_1(z)P_2(z) - P_1(z+c)P_2(z+c)
\end{gathered}$$

比较等式两边最高次项系数可知$a^2\lambda^2=\mu^2-1$，即$a=\dfrac{\pm\sqrt{\mu^2-1}}{\lambda}$，代入式(12)有

$$e^{\pm\frac{\sqrt{\mu^2-1}}{\lambda}\cdot c} \equiv \frac{iP_2(z+c)}{\pm\sqrt{\mu^2-1}\,P_2(z)-\mu P_2(z)-\lambda P_2'(z)} \equiv \frac{\pm\sqrt{\mu^2-1}\,P_1(z)+\lambda P_1'(z)+\mu P_1(z)}{iP_1(z+c)}$$

所以再分为两种情形。

情形2.2.1 当$a=\dfrac{\sqrt{\mu^2-1}}{\lambda}$时，可得$h(z)=\dfrac{\sqrt{\mu^2-1}}{\lambda}z+b$，$e^{\frac{\sqrt{\mu^2-1}}{\lambda}\cdot c}\equiv -i\sqrt{\mu^2-1}-i\mu$，且有

$$c=\frac{\lambda\ln(-i\sqrt{\mu^2-1}-i\mu)+2\lambda k\pi i}{\sqrt{\mu^2-1}}$$

其中k为整数。

情形2.2.2 当$a=\dfrac{-\sqrt{\mu^2-1}}{\lambda}$时，可得$h(z)=\dfrac{-\sqrt{\mu^2-1}}{\lambda}z+b$，$e^{-\frac{\sqrt{\mu^2-1}}{\lambda}\cdot c}\equiv i\sqrt{\mu^2-1}-i\mu$，且有

$$c=-\frac{\lambda\ln(i\sqrt{\mu^2-1}-i\mu)+2\lambda k\pi i}{\sqrt{\mu^2-1}}$$

其中k为整数。

参考文献:

[1] HAYMAN W K. Meromorphic Functions[M]. Oxford:Clarendon Press,1964.

[2] YANG L. Value Distribution Theory[M]. Berlin:Springer-Verlag,1993.

[3] YANG C C,YI H X. Uniqueness Theory of Meromorphic Functions[M]. Dordrecht:Kluwer,2003.

[4] LAINE I. Nevanlinna Theory and Complex Differential Equations[M]. Berlin:Walter de Gruyter,1993.

[5] GROSS F. On the Functional Equation $f^n + g^n = h^n$[J]. Amer Math Monthly,1966,73(10):1093-1096.

[6] YANG C C,LI P. On the Transcendental Solutions of a Certain Type of Nonlinear Differential Equations[J]. Arch Math,2004,82(05):442-448.

[7] LIU K,CAO T B,CAO H Z. Entire Solutions of Fermat Type Differential-difference Equations[J]. Arch Math,2012,99(02):147-155.

[8] CHEN W,HU P C,ZHANG Y Y. On Solutions to Some Nonlinear Difference and Differential Equations[J]. J Korean Math Soc,2016,53(04):835-846.

[9] 邱迪. Fermat型微分差分方程和q-微分差分方程整函数解的存在性[D]. 南昌:江西科技师范大学,2022.

[10] GAO Z,GAO L,LIU M. Entire Solutions of Two Certain Types of Quadratic Trinomial Q-difference Differential Equations[J]. AIMS Mathematics,2023,8(11):27659-27669.

[11] WANG Q,CHEN W,HU P C. On Entire Solutions of Two Certain Fermat Type Differential-difference Equations[J]. Bull Malays Math Sci Soc,2020,43(04):2951-2965.

[12] 陈寒霜. 关于Fermat型复微分-差分方程解的几个性质研究[D]. 贵阳:贵州师范大学,2023.

[13] CHEN J F,LIU S Q. On the Existence of Solutions of Fermat Type Differential-difference Equations[J]. Bull Korean Math Soc,2021,58(04):983-1002.

[14] LI Y,LIU K,SI H B. Fermat and Malmquist Type Matrix Differential Equations[J]. Analysis Mathematica,2023,49(02):563-583.

[15] 蓝双婷,陈宗煊. 微分差分方程的亚纯解 献给余家荣教授100华诞[J]. 中国科学:数学,2019,49(11):1601-1612.

[16] 曾翠萍,邓炳茂,方明亮. 复微分-差分方程组的整函数解[J]. 数学学报(中文版),2019,62(01):123-136.

[17] 刘曼莉,高凌云. 复微分-差分方程组的超越解 献给余家荣教授100华诞[J]. 中国科学:数学,2019,49(11):1633-1654.

[18] 徐玲,罗润梓,曹廷彬. 关于Fermat型微分差分方程的整函数解[J]. 南昌大学学报(理科版),2020,44(04):307-312.

[19] 方成鸿,徐洪焱. Fermat型复微分-差分方程的整函数解[J]. 数学年刊A辑(中文版),2022,43(01):1-16.

Entire Solutions of Fermat Type Complex Differential Difference Equations

GONG Yi-hui,YANG Qi*

(*School of Mathematical Sciences,Xinjiang Normal University,Urumqi,Xinjiang,830054,China*)

Abstract:This paper investigates the existence of entire solutions of complex differential equations in the form of $(\mu f(z)+\lambda f'(z))^2+f(z)^2=P(z)$ and complex differential difference equations in the form of $(\mu f(z)+\lambda f'(z))^2+f(z+c)^2=P(z)$ through the complex differential equations theory and the complex difference equations theory. Firstly, the two equations were factored using Weierstrass factorization theorem to compute the specific forms of $f(z)$ and $\mu f(z)+\lambda f'(z)$;Secondly, the exponent $h(z)$ resulting from the factorization was discussed and divided into two cases, namely, $h(z)$ as a constant and $h(z)$ as a non-constant entire function;Lastly, the relationship between the individual variables in the entire solution was investigated in each of the cases. This article obtains two forms of the existence of entire solutions for Fermat type equations, generalising and improving the previous conclusions from a certain range.

Keywords:Complex differential equations;Complex difference equations;Nevanlinna theory;Entire solutions