

Chebyshev 谱法求解正则长波方程

罗 妍, 宋灵宇*

(长安大学 理学院, 陕西 西安 710064)

摘要: 正则长波方程是最重要的非线性偏微分方程之一。文章提出求解正则长波方程的 Chebyshev 谱法, 采用 Chebyshev-Gauss-Lobatto 配点, 利用 Chebyshev 多项式构造导数矩阵, 将一维和二维的正则长波方程近似为常微分方程, 证明了正则长波方程的离散 Chebyshev 谱法的误差估计, 采用高阶 ODE 求解器进行求解。将该方法得到的数值结果与精确解进行比较, 验证了方法的有效性, 与其他方法相比, 本研究的数据结果具有较高的精确度。

关键词: 正则长波方程; Chebyshev 谱法; Chebyshev-Gauss-Lobatto 点; Chebyshev 多项式

中图分类号: O241.82

文献标识码: A

文章编号: 1008-9659(2026)01-0083-08

谱方法^[1]是配点法的一种, 选取全域的函数作为基底, 即这些基底在整个实数域上大部分非零。从函数近似角度看, 谱方法可以分为 Fourier 谱法^[2]、Chebyshev 谱法^[3]和 Legendre 谱法^[4], 其中 Fourier 谱法适用于周期性问题, Chebyshev 谱法和 Legendre 谱法适用于非周期问题, 这些方法的基础是建立空间基函数。

正则长波(RLW)方程是一个重要的非线性偏微分方程, 其在流体力学、孤立子理论、浅水波等离子体物理及基本粒子物理等领域有着广泛的应用, 与著名的 KdV 方程有广泛的联系, 也用来研究孤子现象。RLW 方程的广义形式定义为

$$u_t + u_x + \varepsilon u^p u_x - \mu u_{xx} = 0, \quad (x,t) \in \mathbb{R} \times [0,T] \quad (1)$$

其中, $u(x,t)$ 为波域, ε 和 μ 为正参数, p 为正整数, t 为时间。边界条件表示为当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $u \rightarrow 0$.

当 $p=1$ 时, 式(1)变为常见的 RLW 方程

$$u_t + u_x + \varepsilon uu_x - \mu u_{xx} = 0 \quad (2)$$

当 $p=2$ 且 $\varepsilon=6$ 时, 式(1)变为修正的正则长波方程(MRLW 方程)

$$u_t + u_x + 6u^2 u_x - \mu u_{xx} = 0 \quad (3)$$

此外, 对称正则方程(SRLW 方程)与 RLW 方程非常相似, 其在 x 和 t 上显对称导数

$$\begin{cases} u_t + \rho_x + uu_x - u_{xx} = 0 \\ \rho_t + u_x = 0 \end{cases} \quad (4)$$

二维的 RLW 方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial t} + \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} + \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial x^2} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 u(x,y,t)}{\partial y^2} \right) \\ & + u(x,y,t) \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial x} + u(x,y,t) \frac{\partial u(x,y,t)}{\partial y} = 0, \quad (x,y) \in \Omega, 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (5)$$

目前, 有许多求解 RLW 方程的方法。Salih 等人^[5]研究了有限差分格式的三次三角 b 样条方法求解 MRLW 方程的配点法。Hammad 等人^[6]在时间和空间上使用 Chebyshev-Gauss-Lobatto 节点, 提出了求解广

[收稿日期] 2024-09-24

[修回日期] 2024-12-30

[基金项目] 国家自然科学基金青年项目(12101482); 中国博士后科学基金面上项目(2022M722604); 陕西省科技厅重点研发一般资助项目(2023-YBSF-372)。

[作者简介] 罗 妍(2000-), 女, 硕士研究生, 主要从事偏微分方程数值解方面研究, E-mail: 13991039545@163.com.

* [通讯作者] 宋灵宇(1965-), 女, 教授, 主要从事偏微分方程数值解方面研究, E-mail: sly779911@chd.edu.cn.

义 RLW 方程的 Chebyshev–Chebyshev 谱配点法。Guo 等人^[7]提出了 RLW 方程的 Fourier 谱法。Behnood 等人^[8]使用 Legendre 谱元法对 RLW 方程进行空间离散,并采用 Crank–Nicolson 格式在时间方向上进行离散。Shokri 等人^[9]通过径向基函数的无网格法对 RLW 方程进行研究。王小飞等人^[10]对 RLW 方程的三次配点法进行研究,分析了 RLW 在该方法下的半离散格式的收敛性,并通过向后 Euler 法研究该方程的全离散格式的误差估计。Hassan 等人^[11]在空间上采用 Fourier 谱法,时间上采用跳蛙格式,对 RLW 方程的孤波进行研究。Bakhoday–Paskyabi 等人^[12]在空间上采用 WG 法,使用周期化标度函数对 RLW 方程的半离散方程进行研究,并探究其收敛性,再通过 FFT 变换和 Runge–Kutta 法对方程进行求解。唐致娣等人^[13]建立了广义 RLW 方程的 Chebyshev–Legendre 谱方法的离散格式,并对其稳定性和收敛性进行分析。Dehghan 等人^[14]采用局部径向基函数有限差分的无网格法,通过合适的形状参数,对一维和二维的 RLW 方程进行求解。Ebrahimijahan 等人^[15]采用有限差分格式对时间导数进行近似,再利用积分径向基函数法逼近空间导数,对二维 RLW 方程进行求解。Gao 等人^[16]对 RLW 和 SRLW 方程在空间上采用 Galerkin 法,根据向后 Eluer 公式和外推的 Crank–Nicolson 格式,使用 Brouwer 不动点定理证明了其数值解的存在性和唯一性。蒋菊霞等人^[17]提出了二维 RLW 方程的三层守恒差分格式,证明了差分解的存在唯一性和二阶收敛性以及无条件稳定性。

文章使用 Chebyshev 谱法求解 RLW 方程,采用 Chebyshev–Gauss–Lobatto 插值点构造 Chebyshev 微分矩阵,对空间变量采用微分矩阵进行离散,使用 Picard 定理对 RLW 方程的半离散格式进行收敛性和稳定性分析。通过 Chebyshev 谱法将偏微分方程转化为常微分方程,对于一维的使用 ODE 求解器对方程进行求解,二维的则使用 Runge–Kutta 法进行求解。

1 RLW 方程的 Chebyshev 谱法

Chebyshev 多项式是在区间 $[-1, 1]$ 上关于 Chebyshev 权函数 $w(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ 的正交多项式系。设 $T_k(x) = \cos(k \arccos(x))$ 为 k 次的第一类 Chebyshev 多项式,选取 $N+1$ 个 Chebyshev–Gauss–Lobatto 节点,则

$$x_j = \cos\left(\frac{j\pi}{N}\right), j = 0, 1, \dots, N$$

如果 $u(x)$ 是一个连续可微函数,那么其在 Chebyshev–Gauss–Lobatto 插值点处近似为

$$\begin{aligned} u_N(x) &= \sum_{k=0}^N a_k L_k(x) \\ L_k(x) &= \frac{2}{N\mu_k} \sum_{j=0}^N \frac{1}{\mu_j} T_k(x_j) T_k(x), k = 0, 1, \dots, N, a_k = u(x_k) \end{aligned}$$

其中

$$\mu_j = \begin{cases} 2, & j = 0, N \\ 1, & 1 \leq j \leq N-1 \end{cases}$$

值得注意的是,对于 $k, j = 0, 1, \dots, N$, Lagrange 插值具有 Kronecker 内积

$$L_k(x_j) = \begin{cases} 0, & j \neq k \\ 1, & j = k \end{cases}$$

为了近似 $u(x)$ 的一阶导数,通过微分插值函数得到

$$u_{Nx}(x) = \sum_{k=0}^N u(x_k) \frac{dL_k(x_j)}{dx} = \sum_{k=0}^N D_{kj} u(x_k)$$

得到 $(N+1) \times (N+1)$ 维的导数矩阵 D_N

$$D_N = \begin{cases} \frac{2N^2 + 1}{6} & k = j = 0 \\ \frac{\mu_k}{\mu_j} \frac{(-1)^{i+j}}{(t_k - t_j)} & k \neq j \\ \frac{-x_j}{2(1 - t_j^2)} & 1 \leq k = j \leq N-1 \\ -\frac{2N^2 + 1}{6} & k = j = N \end{cases}$$

对于一维的RLW方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow D_N, \frac{\partial^2}{\partial x^2} \rightarrow D_N^2, \frac{\partial^3}{\partial x^3} \rightarrow D_N^3, \dots$$

由此方法得到的 D_N 在区间 $[-1, 1]$ 上, 为了使其满足求解区间 $[-a, b]$, 需要对 D_N 进行缩放, 即

$$\frac{\partial}{\partial x} \rightarrow (2/b - a)D_N, \frac{\partial^n}{\partial x^n} \rightarrow [(2/b - a)D_N]^n$$

函数 $u(x)$ 的导数为

$$u'(x) = D_N u, u''(x) = D_N^2 u \quad (6)$$

其中, $\mathbf{u}(x) = (u(x_0), \dots, u(x_N))^T$.

利用Chebyshev谱法过程生成的矩阵, 式(1)变为

$$\mathbf{u}_t + D_N \mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{u}^p D_N \mathbf{u} - \mu D_N^2 \mathbf{u}_t = 0 \quad (7)$$

也可以写为

$$(I - \mu D_N^2) \mathbf{u}_t = -D_N \mathbf{u} - \varepsilon \mathbf{u}^p D_N \mathbf{u} \quad (8)$$

以上方程是该方法生成的ODE系统。为了在时间上离散, 使用任何ODE求解器, 初始向量为 $\mathbf{u}(x, 0)$.

对于二维的RLW方程

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &\rightarrow L_x = (2/b - a)D_{Nx} \otimes I_{Ny+1} \\ \frac{\partial}{\partial y} &\rightarrow L_y = I_{Nx+1} \otimes (2/b - a)D_{Ny} \\ \frac{\partial^2}{\partial x^2} &\rightarrow L_{xx} = [(2/b - a)D_{Nx}]^2 \otimes I_{Ny+1} \\ \frac{\partial^2}{\partial y^2} &\rightarrow L_{yy} = I_{Nx+1} \otimes [(2/b - a)D_{Ny}]^2 \end{aligned}$$

其中, x 方向的离散点数为 $(Nx + 1)$, y 方向的离散点数为 $(Ny + 1)$, I_{Nx+1} 和 I_{Ny+1} 分别为 $Nx + 1$ 阶单位矩阵和 $Ny + 1$ 阶单位矩阵, 则式(5)可变为

$$(I - L_{xx} - L_{yy}) \mathbf{u}_t = -L_x \mathbf{u} - L_y \mathbf{u} - \mathbf{u} L_x \mathbf{u} - \mathbf{u} L_y \mathbf{u} \quad (9)$$

将函数 $u(x, y)$ 离散化为 $(Nx + 1) \times (Ny + 1)$ 维向量 \mathbf{u}

$$\mathbf{u}_{(Nx+1) \times (Ny+1)} = \begin{pmatrix} u_{00} & u_{01} & \cdots & u_{0Ny} \\ u_{10} & u_{11} & \cdots & u_{1Ny} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{Nx0} & u_{Nx1} & \cdots & u_{NxNy} \end{pmatrix}$$

在时间方向上采用四阶Runge-Kutta法对二维的RLW方程进行求解, 将式(9)变为

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}_t = F(\mathbf{u}, t) \\ \mathbf{k}_1 = F(t, \mathbf{u}_n) \\ \mathbf{k}_2 = F\left(t + \frac{dt}{2}, \mathbf{u}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_1\right) \\ \mathbf{k}_3 = F\left(t + \frac{dt}{2}, \mathbf{u}_n + \frac{1}{2}\mathbf{k}_2\right) \\ \mathbf{k}_4 = F\left(t + \frac{dt}{2}, \mathbf{u}_n + \mathbf{k}_3\right) \\ \mathbf{u}_{n+1} = \mathbf{u}_n + \frac{dt}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \end{array} \right.$$

2 收敛性和稳定性分析

设 $I = (-1, 1)$, $L_\omega^2(I)$ 是可测函数的空间, 定义Sobolev函数空间 $H_\omega^m(I)$ 和范数为

$$H_\omega^m(I) = \left\{ u: \frac{\partial^i u}{\partial x^i} \in L_\omega^2(I), 0 \leq i \leq m \right\}$$

$$\|u\|_{H_\omega^m(I)} = \left(\sum_{k=\min(m, N+1)}^m \|\partial_x^k u\|_\omega^2 \right)^{1/2}, \|u\|_{H_\omega^m(I)} = \left(\sum_{k=0}^m \|\partial_x^k u\|_\omega^2 \right)^{1/2}$$

将所有次数不超过 N 的多项式组成的空间记为 P_N , 引入正交映射 $P_N: L_\omega^2(I) \rightarrow P_N$, 则对任意的 $u \in L_\omega^2(I)$, 都有

$$(u - P_N u, \phi)_\omega = 0, \forall \phi \in P_N$$

通过 Picard 迭代定理对一维 RLW 方程的半离散格式的收敛性及稳定性进行分析, 给出式(1)的半离散格式, 对任意的 $u_N \in P_N, v \in P_N$, 有

$$(u_{Nt}, v_N) + (u_{Nx}, v_N) + \varepsilon(u_N^p u_{Nx}, v_N) - \mu(u_{Nxt}, v_N) = 0 \quad (10)$$

引理 1^[1] 假设 $u \in L_\omega^2(I)$, 对任意的 $0 \leq \mu \leq m$, 存在一个与 u 和 N 无关的常数 C , 使得

$$\|u - P_N u\|_\mu \leq C N^{\mu-m} \|u\|_m, \|P_N u\|_\mu \leq C \|u\|_\mu$$

引理 2 设 $u_0 \in L_\omega^2(I), 0 < \varepsilon \leq 1$, 则式(10)有唯一解 $u_N(t)$ 满足以下不等式

$$\|u_N\|^2 + \mu|u_N|_1^2 \leq e^{\varepsilon T} \|u_0^{p+1}\|^2, (2 - \varepsilon) \int_0^T \|u_{Nx}\|^2 dt \leq (\varepsilon e^{\varepsilon T}) \|u_0^{p+1}\|^2 + \|u_0\|^2 + \mu|u_0|_1^2 \quad (11)$$

证明 令式(10)中的 $v_N = u_N$, 有

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_N\|^2 + \frac{1}{2} \mu \frac{d}{dt} |u_N|_1^2 + \|u_{Nx}\|^2 \leq \varepsilon (u_N^p u_{Nx}, u_N) \quad (12)$$

其中

$$\varepsilon (u_N^p u_{Nx}, u_N) = -\varepsilon (u_N^p u_N, u_{Nx}) \leq \varepsilon \|u_N^{p+1}\| \|u_{Nx}\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \|u_N^{p+1}\|^2 + \frac{\varepsilon}{2} \|u_{Nx}\|^2 \quad (13)$$

将式(13)代入式(12), 得

$$\frac{d}{dt} \|u_N\|^2 + \mu \frac{d}{dt} |u_N|_1^2 + (2 - \varepsilon) \|u_{Nx}\|^2 \leq \varepsilon \|u_N^{p+1}\|^2 \quad (14)$$

使用 Gronwall 不等式得到

$$\|u_N\|^2 + \mu|u_N|_1^2 \leq e^{\varepsilon t} \|u_N^{p+1}(0)\|^2 \leq e^{\varepsilon T} \|u_0^{p+1}\|^2$$

对式(14)从 0 到 T 进行积分, 得到

$$\|u_N\|^2 - \|u_N(0)\|^2 + \mu \left(|u_N|_1^2 - |u_N(0)|_1^2 \right) + (2 - \varepsilon) \int_0^T \|u_{Nx}\|^2 dt \leq \varepsilon \int_0^T \|u_N^{p+1}\|^2 dt$$

由此, 得出结论

$$(2 - \varepsilon) \int_0^T \|u_{Nx}\|^2 dt \leq (\varepsilon e^{\varepsilon T}) \|u_0^{p+1}\|^2 + \|u_0\|^2 + \mu|u_0|_1^2$$

引理 3 设 $u(t)$ 是式(1)的近似解, $u_N(t)$ 是式(10)的解, $u_0 \in L_\omega^2(I)$, 如果 $u \in L_\omega^2(I)$, 那么存在一个常数 C , 使得

$$\|e_N\|^2 + \mu|e_N|_1^2 \leq C(N^{-m} \|u_0\|^{2p+2} + \|e_N(0)\|^2)$$

证明 令 $e_N = P_N u(t) - u_N(t), \eta_N = u(t) - P_N u(t)$, 分别将 $u(t), u_N(t)$ 代入式(1)和式(10)中相减得到

$$(e_{Nt}, v_N) + (e_{Nx}, v_N) + \varepsilon (P_N(u^p u_x) - u_N^p u_{Nx}, v_N) - \mu(e_{Nxt}, v_N) = 0 \quad (15)$$

令式(15)中 $v_N = e_N$, 得

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|e_N\|^2 + \frac{1}{2} \mu \frac{d}{dt} |e_N|_1^2 \leq \|e_{Nx}\|^2 + \varepsilon (P_N(u^p u_x) - u_N^p u_{Nx}, e_N) \quad (16)$$

其中

$$\begin{aligned} P_N(u^p u_x) - u_N^p u_{Nx} &= P_N(u^p u_x) - u^p u_x + u^p u_x - P_N(u^p u_{Nx}) + P_N(u^p u_{Nx}) - u_N^p u_{Nx} \\ &\leq \|u_x\| \|P_N u^p - u^p\| + \|u^p\| \|u_x - P_N u_{Nx}\| + \|u_{Nx}\| \|P_N u^p - u_N^p\| \\ &\leq CN^{-m} \|u_x\| \|u^p\| + CN^{-m} \|u^p\| \|u_x\|^2 + \|u_{Nx}\| \|P_N u^p - u_N^p\| \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \|P_N u^p - u_N^p\| &= \|P_N u^p - u^p + u^p - (P_N u)^p + (P_N u)^p - u_N^p\| \\ &\leq \|P_N u^p - u^p\| + \|u^p - (P_N u)^p\| + \|(P_N u)^p - u_N^p\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\|u^p - (P_N u)^p\| &= \|(u - P_N u)(u^{p-1} + (P_N u)^{p-1}) + (u P_N u)(u^{p-2} - (P_N u)^{p-2})\| \\
&\leq \|(u - P_N u)(u^{p-1} + (P_N u)^{p-1} + (u P_N u)(u^{p-3} + (P_N u)^{p-3}) + \dots + (u P_N u)^{p-3}(u + P_N u))\| + \|(u P_N u)^{\frac{p-3}{2}}\| \\
&\leq CN^{-m}\|u\|\|u^{p-1}\|_{\infty} + C\|u^{p-3}\|
\end{aligned}$$

同理

$$\|(P_N u)^p - u_N^p\| \leq \|\eta_N\|\|u_N^{p-1}\|_{\infty} + C\|u_N^{p-3}\|$$

所以得到

$$\begin{aligned}
\|P_N u^p - u_N^p\| &\leq C(N^{-m}\|u\| + \|u^{p-3}\|) \\
\|P_N(u^p u_x) - u_N^p u_{N,x}\| &\leq C(N^{-m}\|u^p\| + \|u^2\| + \|u\|)
\end{aligned}$$

将上式代入式(16), 使用引理2, 再利用Gronwall不等式得到

$$\|e_N\|^2 + \mu|e_N|^2 \leq C(N^{-m}\|u_0\|^{2p+2} + \|e_N(0)\|^2) \quad (17)$$

定理1 设 $u(t)$ 是式(1)的解, $u_N(t)$ 是式(10)的解, $u_0 \in L_\omega^2(I)$, 如果 $u \in L_\omega^2(I)$, 那么存在一个常数 C , 使得

$$\|u(t) - u_N(t)\| \leq CN^{-m} + C\|e_N(0)\|^2$$

证明 使用引理1和引理3, 有

$$\|u(t) - u_N(t)\| \leq \|\eta_N(t)\| + \|e_N(t)\| \leq CN^{-m}\|u\| + C(N^{-m}\|u_0\|^{2p+2} + \|e_N(0)\|^2) \leq CN^{-m} + C\|e_N(0)\|^2$$

3 数值实验

通过以下两种误差来衡量计算结果的准确性,

$$L_\infty = \|u - \tilde{u}\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |u_i - \tilde{u}_i|, L_2 = \sqrt{h \sum_{i=0}^N |u_i - \tilde{u}_i|^2}$$

其中, u_i 和 \tilde{u}_i 分别表示为精确解和近似解。

例1 考虑单波的RLW方程, 在式(1)中取 $p=\varepsilon=\mu=1$, 边界条件当 $x \rightarrow \pm\infty$ 时, $u \rightarrow 0$.

$$u_t + u_x + uu_x - u_{xxt} = 0 \quad (18)$$

精确解为

$$u(x,t) = 3c \operatorname{sech}^2(p(x - x_0 - (1 + \varepsilon c)t))$$

其中, $3c$ 是起始点为 x_0 的单孤波振幅, $v = 1 + \varepsilon c$ 为波速, $p = \sqrt{\varepsilon c/4v(1 + \varepsilon c)}$, 初始条件为

$$u(x,0) = 3c \operatorname{sech}^2(p(x - x_0))$$

取 $N=400$, 即401个Chebyshev节点, 在 $c=0.1, x_0=0, \Omega=[-100, 100], dt=0.2, T=5$ 条件下计算数值解和精确解。由图1和图2可以发现数值解与精确解吻合度较高。图3给出了当 $dt=0.2$ 时, $T=5, 10, 15, 20$ 的精确解和数值解, 随着时间的推移, 方程的孤波在 $[-100, 100]$ 内向右移动, 进一步证明数值解的正确性。表1给出了 $dt=0.1, h=0.1, \Omega \in [-40, 60]$ 时 T 取不同值的两种误差。与Legendre谱元法^[8]对式(14)的解的方法相比, 误差减小, 并且当 T 增大时误差也随之增大。在研究中发现, 振幅 $3c$ 的变化也会影响误差, 为此, 取 $h=0.125$, 通过表2可以看到, 随着 c 的减小, 误差也会减小。

表1 T 在不同时刻的两种误差

T	Chebyshev 谱法($N=100$)		Legendre 谱元法 ^[8] ($N=400$)	
	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
5	2.6	0.8101	1.2270	0.1971
10	5.1	1.6000	8.7683	1.1635
15	7.6	2.4000	24.6970	2.9256
20	10.0	3.2000	47.6650	5.0842
25	12.4	3.9000	75.8920	7.3959

表2 c 取不同值时两种误差的变化($h=0.125$)

c	L_2	L_∞
10^{-1}	1.8e-03	1.7e-03
10^{-2}	5.3038e-06	3.8327e-06
10^{-5}	4.8205e-07	1.212e-07

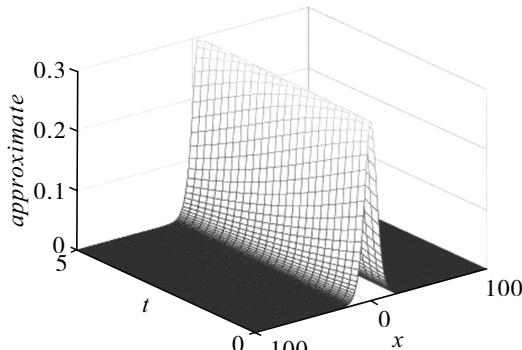


图1 例1的数值解

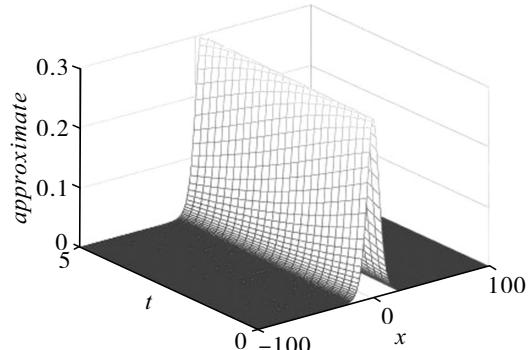
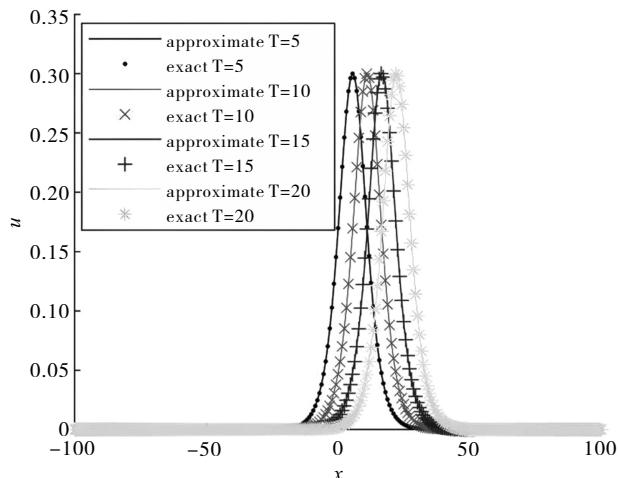


图2 例1的精确解

图3 $dt=0.2, T$ 在不同时刻的精确解和数值解

例2 一维修正的RLW方程,在式(1)中取 $\varepsilon=\mu=1, p=2$,精确解为

$$u(x,t)=3c \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{1+c}} (x-(1+c)t-x_0)\right)$$

初始条件为 $u(x,0)=3c \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{c}{1+c}} (x-x_0)\right)$,边界条件为 $u(0,t)=u(100,t)=0$.

取 $x_0=40, N=500, c=0.09, dt=0.1, T=5, h=0.2$,图4给出了通过Chebyshev谱法求解该问题的数值解。图5是该方程的精确解,对比发现数值解和精确解的吻合度较高。表3给出 $N=100, dt=0.1, c=0.09$ 的情况下,不同时刻的误差与其他文献中对该方程的求解相比,Chebyshev谱法求解精度高。

表3 $dt=0.1, N=100, c=0.09$ 不同时刻的误差

T	Chebyshev 谱法		配点法 ^[5]	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
5	0.0172	0.0193	0.072146	0.024671
10	0.0345	0.0428	0.142238	0.049605
15	0.0518	0.0636	0.208868	0.072388
20	0.0691	0.0803	0.271397	0.092359

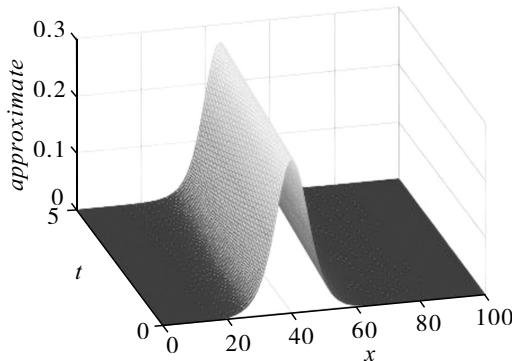


图4 例2的数值解

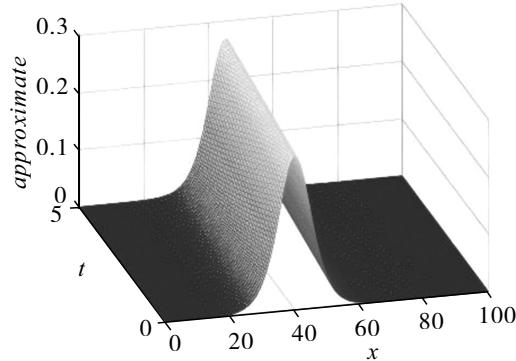


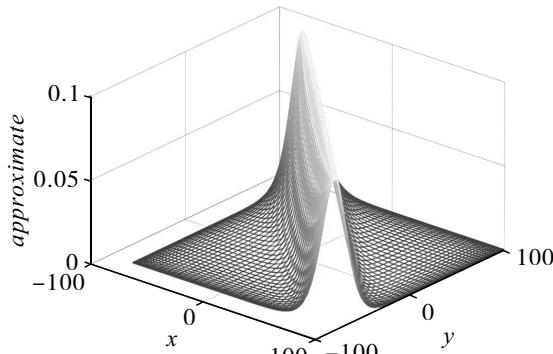
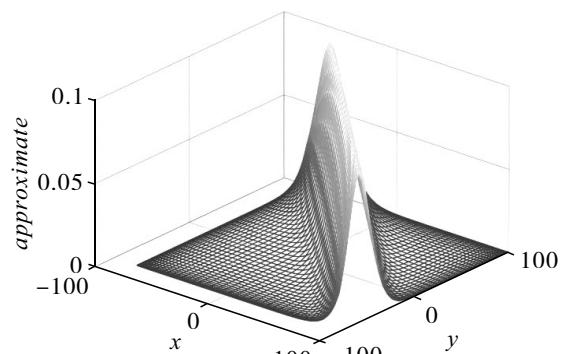
图5 例2的精确解

例3 考虑二维的RLW方程式(5),其精确解为

$$u(x,y,t) = \frac{q}{2} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{\sqrt{q}}{2p} (x + y - vt - x_0 - y_0) \right]$$

其中, $q = 3(v - 2)$, $p = \sqrt{6v}$.

取 $v=2.06$, $N=100$, $dt=0.1$, 图6是 $T=10$ 的数值解, 图7是 $T=20$ 的数值解。从表4可以看出, 当Chebyshev节点达到60时, Chebyshev谱法的误差小于局部径向基函数有限差分法, 并且当Chebyshev节点数量越多时, 误差越小。

图6 $T=10$ 的数值解图7 $T=20$ 的数值解表4 Chebyshev谱法与局部径向基函数有限差分法的 L_∞ 误差范数的比较

t	Chebyshev谱法				局部径向基函数有限差分法 ^[14]
	$L_\infty(N=30)$	$L_\infty(N=40)$	$L_\infty(N=50)$	$L_\infty(N=60)$	
10	2.30e-03	2.20e-03	2.00e-03	1.90e-03	2.0083e-03
20	3.00e-03	2.60e-03	2.40e-03	2.20e-03	5.9434e-03

4 结论

文章使用Chebyshev谱法对RLW方程进行数值求解,给出了该方法求解一维和二维RLW方程的数值解和精确解,讨论了一维RLW方程Chebyshev谱方法的收敛性和稳定性。研究发现Chebyshev谱法可以在较少的Chebyshev点处得到比其他方法更小的误差,一维RLW方程孤波随着时间向右移动,进一步证明了该方法的准确性。

参考文献:

- [1] CANUTO C, HUSSAINI M Y, QUARTERONI A, et al. Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains [M]. Berlin: Springer, 2006.

- [2] JI B Q, ZHANG L M. A Fourth-order Exponential Wave Integrator Fourier Pseudo-spectral Method for the Klein-Gordon Equation [J]. *Applied Mathematics Letters*, 2020, 109: 106519.
- [3] CHEN X, QIU J, XIA T, et al. A Novel Chebyshev-collocation Spectral Method for Solving the Transport Equation [J]. *Journal of Industrial*, 2021, 17(05): 2519–2526.
- [4] DEHGHAN M, SHAMIS M. Numerical Solution of Two-dimensional Parabolic Equation Subject to Non-standard Boundary Specifications Using the Pseudospectral Legendre Method [J]. *Methods Partial Differential Equations*, 2006, 22(06): 1255–1266.
- [5] SALIH H, TAWFIQ L N M, YAHYAL Z R, et al. Solving Modified Regularized Long Wave Equation Using Collocation Method [C]// *Journal of Physics: Conference Series*, 2018, 1003(01): 012062.
- [6] HAMMAD D A, EL-AZAB M. Chebyshev-Chebyshev Spectral Collocation Method for Solving the Generalized Regularized Long Wave (GRLW) Equation [J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2016, 285: 228–240.
- [7] GUO B, MANORRANJAN V. Spectral Method for Solving the RLW Equation [J]. *Journal Computational Mathematics*, 1985, 3(03): 228–237.
- [8] BEHNOOD M, ALI S. A Legendre Spectral Element Method for the Family of Regularized Long Wave Equations [J]. *Mathematics and Computers in Simulation*, 2022, 201: 239–253.
- [9] SHOKRI A, DEHGHAN M. A Meshless Method Using the Radial Basis Functions for Numerical Solution of the Regularized Long Wave Equation [J]. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 2010, 26(04): 807–825.
- [10] 王小飞, 李宏, 刘洋, 等. 正则长波方程的三次配点法 [J]. *应用数学*, 2011, 24(02): 345–351.
- [11] HASSAN H N, SALEH H K. The Solution of the Regularized Long Wave Equation Using the Fourier Leap-frog Method [J]. *Zeitschrift für Naturforschung A*, 2010, 65(04): 268–276.
- [12] BAKHODAY-PASKYABI M, VALINEJAD A, AZODI H D. Numerical Solution of Regularised Long Ocean Waves Using Periodised Scaling Functions [J]. *Pramana*, 2019, 92: 1–15.
- [13] 唐致娣, 赵廷刚. Chebyshev-Legendre 谱方法解广义 RLW 方程的误差分析 [J]. *西南大学学报(自然科学版)*, 2014, 36(01): 72–77.
- [14] DEHGHAN M, SHAFIEEABYANEH N. Local Radial Basis Function-finite-difference Method to Simulate Some Models in the Nonlinear Wave Phenomena: Regularized Long-wave and Extended Fisher-kolmogorov Equations [J]. *Engineering with Computers*, 2021, 37(02): 1159–1179.
- [15] EBRAHIMIJAHAN A, DEHGHAN M. The Numerical Solution of Nonlinear Generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers and Regularized Long-wave Equations via the Meshless Method of Integrated Radial Basis Functions [J]. *Engineering with Computers*, 2021, 37(01): 93–122.
- [16] GAO Y, MEI L. Galerkin Finite Element Methods for Two-dimensional RLW and SRLW Equations [J]. *Applicable Analysis*, 2018, 97(13): 2288–2312.
- [17] 蒋菊霞, 王波, 王晓峰. 二维非线性 RLW 方程的守恒差分格式 [J]. *数学的实践与认识*, 2018, 48(17): 229–237.

The Solution of the Regularized Long Wave Equations Using the Chebyshev Spectral Method

LUO Yan, SONG Ling-yu*

(College of Science, Chang'an University, Xi'an, Shaanxi, 710064, China)

Abstract: The regularized long wave equation is one of the most important nonlinear partial differential equations. In this paper, the Chebyshev spectral method is proposed to solve the regularized long wave equation, the Chebyshev polynomial and Chebyshev-Gauss-Lobatto are used to construct the derivative matrix, and the one-dimensional and two-dimensional regularized long wave equations are approximated as ordinary differential equations to prove the error estimation of the discrete Chebyshev spectral method and the solution is performed using a higher-order ODE solver. The numerical results obtained by the method are compared with the exact solution, and the effectiveness of the method is verified. The data results in this paper are more accurate than that of other methods.

Keywords: Regularized long wave equation; Chebyshev spectral method; Chebyshev-Gauss-Lobatto point; Chebyshev polynomials